Repaso de temas previos

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Lógica

Una teoría matemática es un conjunto de proposiciones que se siguen según el esquema de deducción lógica. Es decir, se parte de unas proposiciones de partida, **hipótesis**, y se se llega a una conclusión, que es la **tesis**. En un razonamiento válido, la tesis se **deduce** de la hipótesis; también se dice que la hipótesis implica la tesis.
Por ejemplo,
Hipótesis:

- Los santiagueños son argentinos
- Los argentinos son latinoamericanos

Tesis: Todos los santiagueños son latinoamericanos.
En un razonamiento válido, la verdad de las tesis se reduce a la verdad supuesta de las hipótesis; pero la validez del razonamiento es distinto de la verdad de las proposiciones que en él intervienen.
Por ejemplo, un razonamiento inválido sería:
Hipótesis:

- Los santiagueños son argentinos
- Los argentinos son latinoamericanos

Tesis: Los latinoamericanos son santiagueños.

Lógica

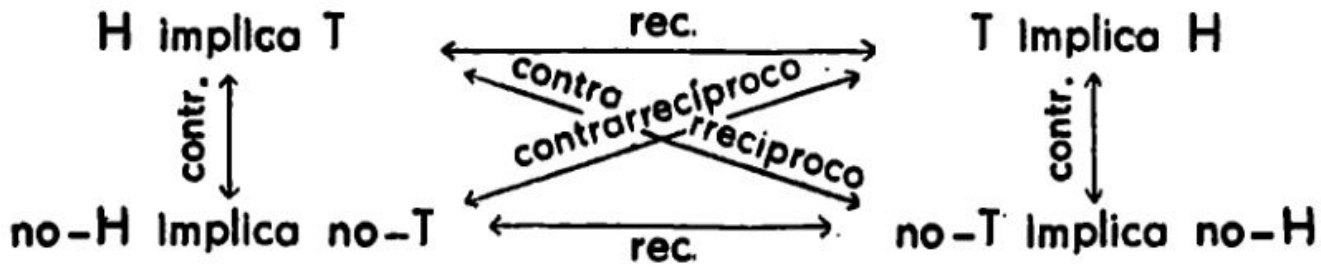
Aunque el razonamiento sea válido, la tesis puede ser falsa por la falsedad de la hipótesis:
Hipótesis:

- Los santiagueños son argentinos
- Los argentinos son europeos

Tesis: Los santiagueños son europeos.

Lógica

Dado un teorema “H implica T”, hay varios teoremas asociados con él.



Fuente: Pastor *et al.* (1969a) pág. 6.

La validez de un teorema no implica la de su recíproco, aunque si la del contrarrecíproco. El teorema directo “H implica T” dice que H es condición suficiente para T. El teorema recíproco dice que H es condición necesaria para T. Si ambos son verdaderos, entonces H es condición necesaria y suficiente para T, y son equivalentes.
Siguiendo con el ejemplo.
Hipótesis:

- Los santiagueños son argentinos
- Los argentinos son latinoamericanos

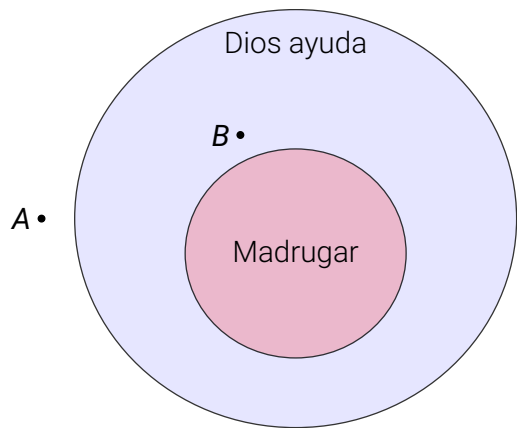
Tesis: Todos los santiagueños son latinoamericanos.
El teorema recíproco es “Los latinoamericanos son santiagueños”, que es falso.
El teorema contrario es “Los que no son santiagueños tampoco son latinoamericanos”, que es falso.
El teorema contrarrecíproco es “Los que no son latinoamericanos tampoco son santiagueños”, que es verdadero.

Lógica

Teorema (ponele)

Al que madruga Dios lo ayuda

Siempre es útil expresar los teoremas como “si H entonces T”
En este caso: si madruga entonces Dios lo ayuda.
H = Madrugar.
T = Dios ayuda.
Este teorema da condiciones suficientes para que Dios ayude, y condiciones necesarias para madrugar.



¿Es cierto que si Dios no lo ayuda entonces no madruga? Sí, es el contrarrecíproco. Podría ser el punto ***A***, por ejemplo. Para que madrugue tiene que estar adentro del círculo de Dios ayuda.
¿Es cierto que si no madruga entonces Dios no lo ayuda? No. Este es el contrario, y su verdad puede ser distinta de la del teorema directo. Podría ser el punto ***B***, por ejemplo.

Lógica

Teorema de Schwarz o Young o Clairaut

Si una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ posee derivadas parciales de segundo orden continuas, entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales, es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Este teorema da condiciones suficientes (pero no necesarias) para que las derivadas parciales cruzadas sean iguales.

¿Podemos decir que si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ entonces las derivadas parciales de segundo orden no son continuas? Sí porque es el contrarrecíproco.

¿Podemos decir que si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ entonces las derivadas parciales de segundo orden son continuas? No. La verdad del recíproco es independiente de la del teorema directo. Puede ser cierto o falso. En este caso es falso.

¿Podemos decir que si las derivadas parciales de segundo orden no son continuas entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$? No. Este es el contrario, cuya verdad es igual a la del recíproco. Por lo tanto, es falso.

Combinación lineal lineal

El vector **v** es **combinación lineal** de la familia de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ si y solo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tales que

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mathbf{v}_i$$

Ejemplo: Determinemos si $(-1; 1; 3)$ es combinación lineal de $(-1; 0; 2)$ y $(-1; 2; 4)$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 \\ 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{bmatrix}$$

De la segunda ecuación $\alpha_2 = 1/2$.
Reemplazando en la primera $\alpha_1 = 1/2$.
La tercera ecuación verifica $2 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/2 = 3$.
Entonces es combinación lineal.

Independencia lineal

Un conjunto de vectores es **linealmente independiente** si y solo si la única combinación lineal de dicha familia cuyo resultado sea el vector nulo es la trivial.

$$\text{Independencia lineal} \Leftrightarrow \forall i : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mathbf{v}_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

Ejemplo: Determinemos si $\{(1; -1; 0), (1; 1; 2), (1; 0; 1)\}$ son LI

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la segunda ecuación $\alpha_1 = \alpha_2$.
De la tercera ecuación $\alpha_3 = -2\alpha_2$.
α_1 está libre.
Entonces si $\alpha_1 = a \Rightarrow \alpha_2 = k \Rightarrow \alpha_3 = -2a$ con $a \in \mathbb{R}$.
Por lo tanto, estos vectores no son LI, son LD. Esto implica que algún vector es combinación lineal de los otros.

Sistema de generadores

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es un **sistema de generadores** del espacio vectorial V sii todo vector de V puede escribirse como combinación lineal de dicho conjunto de vectores.

Por ejemplo, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$, ya que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como combinación lineal de esos dos vectores.

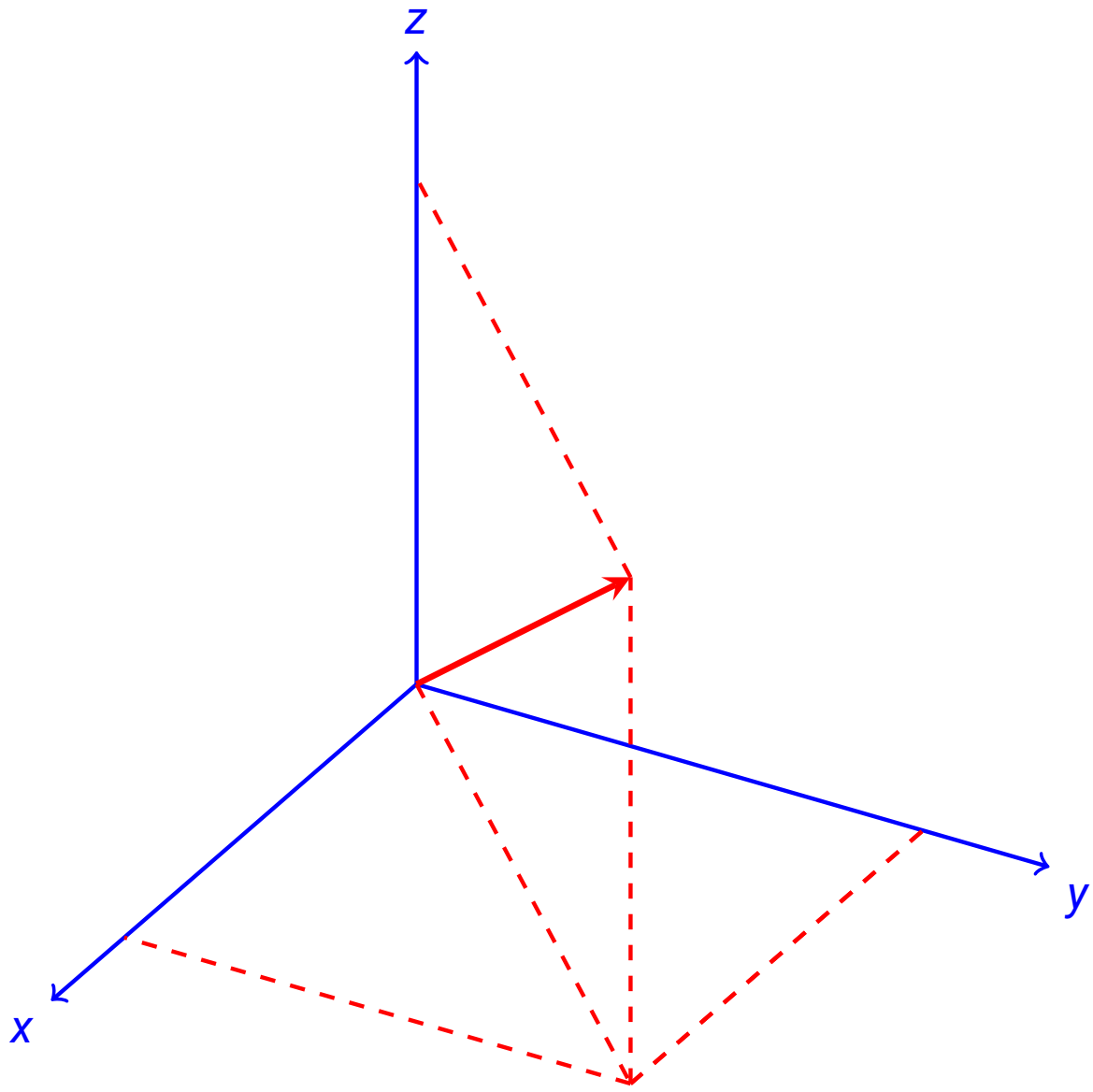
Cuando los vectores del sistema de generadores son LI, estos constituyen una **base** de ese espacio vectorial.

Por ejemplo, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ son una base de $\mathbb{R}^2$, pero $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ no son una base de $\mathbb{R}^2$, a pesar de ser un sistema de generadores.

Cada vector de un espacio vectorial tendrá una representación única en función de las coordenadas de la base. Cuando la base es la canónica, el vector es igual a sus coordenadas.

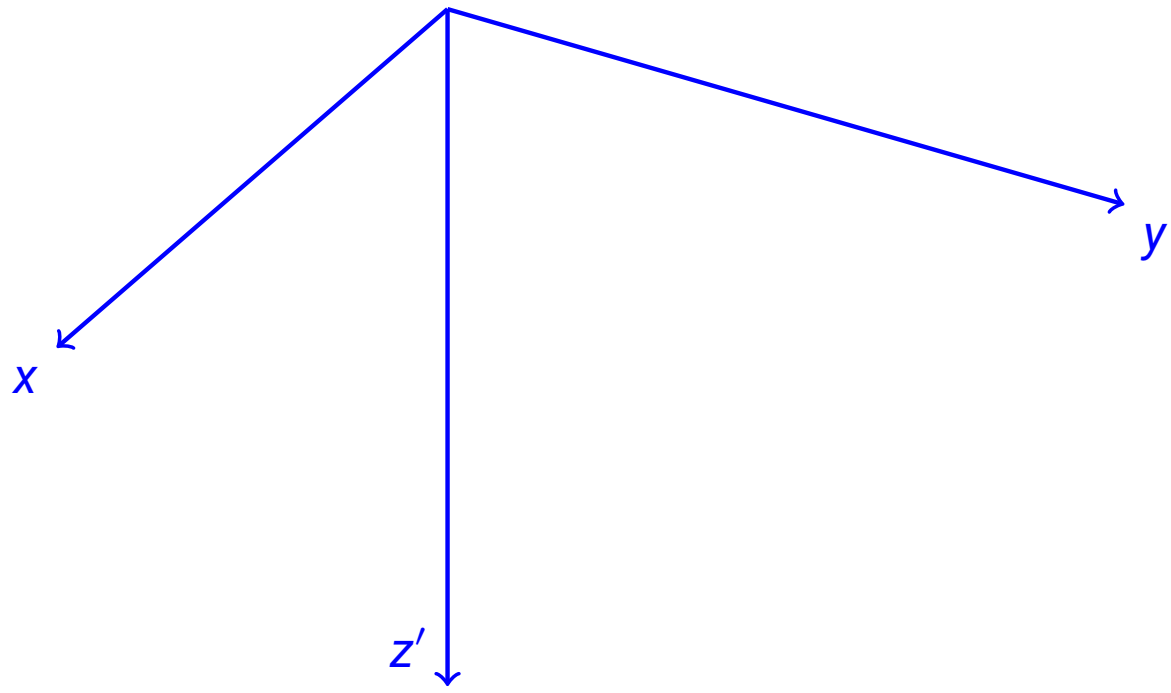
Base de un espacio vectorial

El vector cuyas coordenadas son $(1; 1; 1)$ en la base canónica es



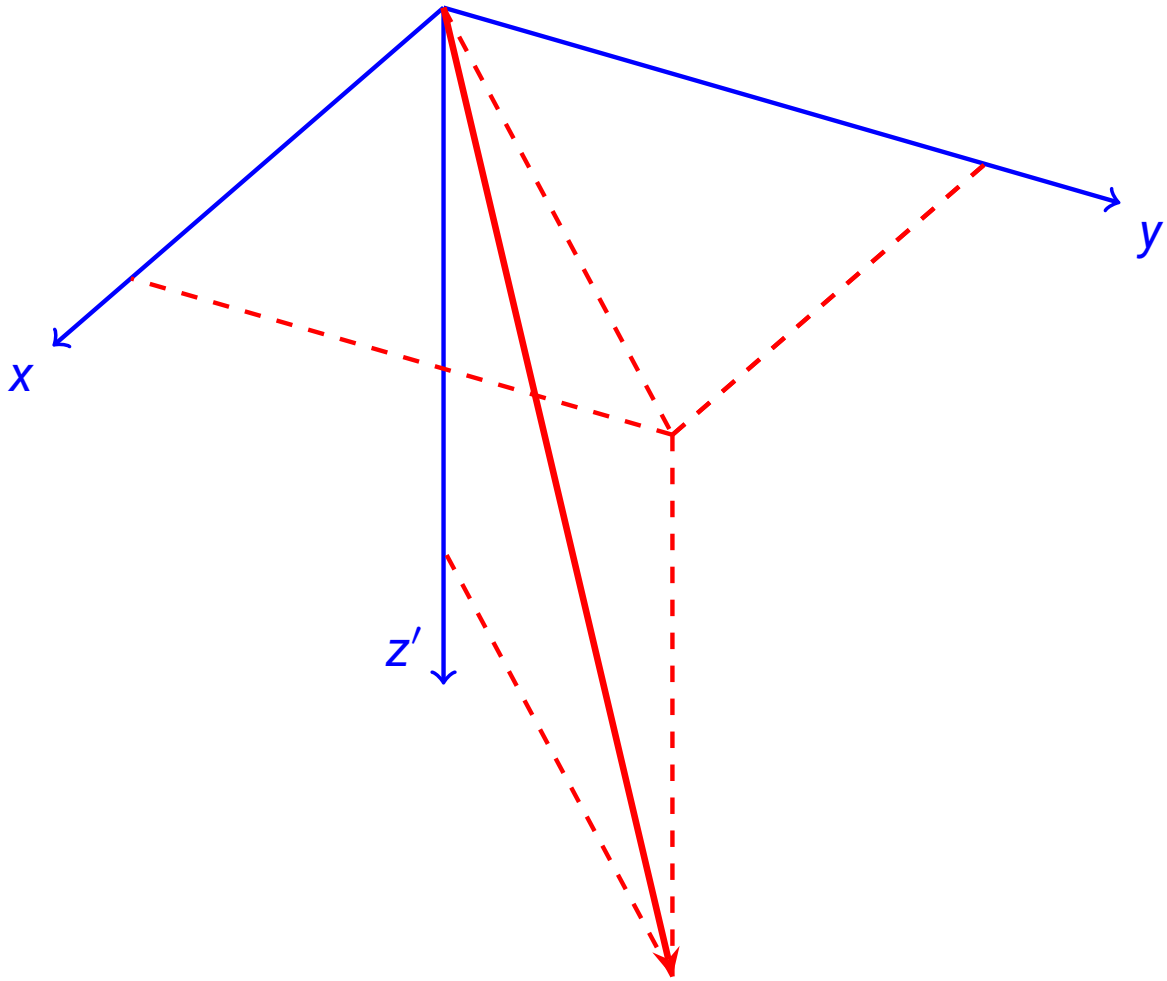
Base de un espacio vectorial

Si cambiamos de base a $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,-1)\}$, entonces es como cambiar los ejes sobre los cuales graficamos los vectores



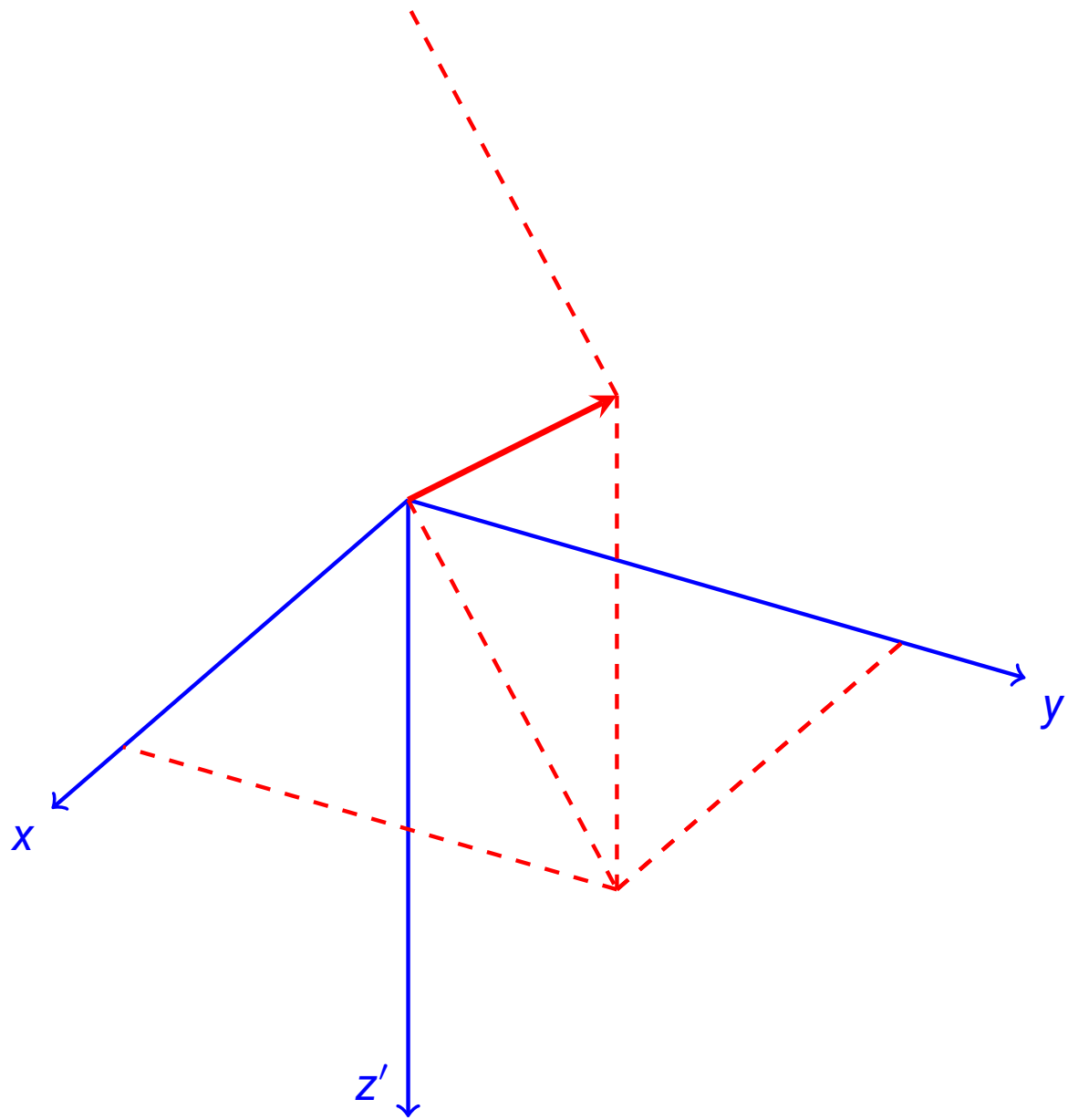
Base de un espacio vectorial

Pero si ahora queremos graficar el mismo vector, las coordenadas no son $(1, 1, 1)$



Base de un espacio vectorial

El vector en la nueva base es $(1, 1, -1)$



Base de un espacio vectorial

El procedimiento para hallar las coordenadas un vector en una nueva base consiste en igualar las coordenadas del vector en la vieja base con la combinación lineal de los vectores de la nueva base:

$$(1,1,1) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,-1)$$

Despejando los escalares tenemos que

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$$

Por eso las coordenadas del vector en esta nueva base son

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Determinante

El método más general para calcular un determinante es la regla de Laplace, que permite descomponer su cálculo a partir del determinante de matrices de menor dimensión.

Regla de Laplace

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de cada elemento (de un renglón o columna) por su respectivo cofactor.

Ejemplo: Calculemos el determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 2 - 5 \cdot 19 + 2 \cdot 10 = -69$$

Acá elegimos la primera fila pero podríamos haber tomado cualquier otra fila o columna y el resultado hubiese sido el mismo.

Determinante

Algunas propiedades:

- Si se permutan dos columnas de una matriz, entonces el determinante se multiplica por -1.
- El determinante de una matriz que tenga dos columnas idénticas es cero.
- Si una columna de una matriz es el vector nulo, entonces su determinante es cero.
- El determinante de una matriz no cambia si a una columna se le suma una combinación lineal de otras.
- Si se traspone una matriz, entonces su determinante no cambia.
- El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada matriz.

Matriz de cofactores, adjunta e inversa

Si reemplazamos cada elemento de la matriz **A** por su respectivo cofactor tenemos la **matriz de cofactores**

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & -19 & 10 \\ -16 & 14 & -11 \\ 11 & -1 & -14 \end{bmatrix}$$

La traspuesta de esta matriz es la **matriz adjunta**

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \text{cof}(\mathbf{A})^T = \begin{bmatrix} 2 & -16 & 11 \\ -19 & 14 & -1 \\ 10 & -11 & -14 \end{bmatrix}$$

Si la dividimos por el determinante de **A** tenemos la inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{Adj}(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} -2/69 & 16/69 & -11/69 \\ 19/69 & -14/69 & 1/69 \\ -10/69 & 11/69 & 14/69 \end{bmatrix}$$

Menores de una matriz

Definiciones

Un **menor** de una matriz **A** es el determinante de alguna submatriz obtenida de **A** mediante la eliminación de una o más de sus filas o columnas.
Un **menor principal** de una matriz **A** es un menor cuya diagonal tiene todos sus elementos de la diagonal principal de **A**.
Un **menor principal dominante** de una matriz **A** es el determinante de la submatriz formada por las ***r*** primeras filas y las ***r*** primeras columnas de A.

$$\text{Menores} \supseteq \text{Menores principales} \supseteq \text{Menores principales dominantes}$$

Ejemplo: Escriba los menores de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Menores de una matriz

Los menores de orden 1 de **A** son:

$$\{[3], [5], [2], [4], [2], [3], [-1], [2], [4]\}$$

Los menores principales de orden 1 son:

$$\{[3], [2], [4]\}$$

El menor principal dominante de orden 1 es $\{[3]\}$.
Los menores de orden 2 son:

$$\left\{\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\-1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 2\\-1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\-1 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}\right\}$$

Los menores principales de orden 2 son

$$\left\{\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}\right\}$$

El menor principal dominante de orden 2 es

$$\left\{\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 2\end{bmatrix}\right\}$$

De orden 3 el único menor (y principal y dominante) es la propia matriz **A**.

Sistemas de ecuaciones lineales

Consideremos un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

Escrito con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

más sucintamente:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

A es la matriz de coeficientes, **x** es el vector de incógnitas y **b** es el vector de términos independientes.
Si el sistema tiene una solución única decimos que es compatible determinado (SCD).
Si tiene infinitas soluciones es incompatible determinado (SCI).
Si no tiene solución es incompatible (SI).

Sistemas de ecuaciones lineales

Una forma de resolver sistemas lineales es invirtiendo la matriz de coeficientes:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Si la matriz no es invertible entonces el sistema no es SCD, y solo podrá ser SCI o SI. Otro método de resolución es la **regla de Cramer**. Si denominamos $\mathbf{A}_j$ a la matriz cuya j-ésima columna es reemplazada por el vector de términos independientes, entonces

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$|\mathbf{A}| = 6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

$$x_1 = \frac{24}{6} = 4$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

$$x_2 = \frac{-12}{6} = -2$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

También se podría resolver invirtiendo la matriz de coeficientes:

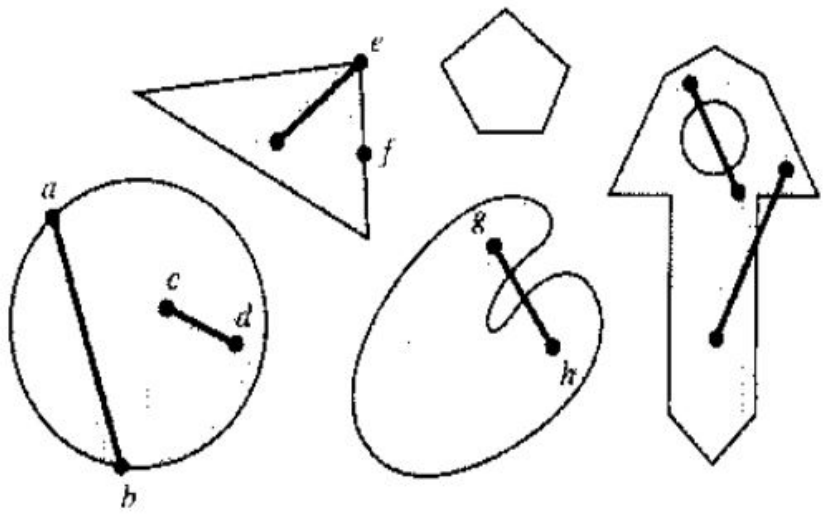
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ entonces el sistema de ecuaciones se dice homogéneo.
Si el sistema es homogéneo y SCD, entonces la única solución es la trivial, es decir, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si el sistema es homogéneo y no es SCD, entonces es SCI, ya que nunca puede ser SI.
Un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones en n incógnitas es SCD si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. Esto es equivalente a exigir que las columnas de la matriz de coeficientes sean linealmente independientes, o a que el rango de la matriz sea igual al a n.

Conjuntos convexos

El conjunto C es **convexo** si y solo si para dos puntos cualesquiera $x, y \in C$, la combinación $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.
A la combinación lineal $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ con $\lambda \in [0, 1]$ se la denomina combinación convexa.
Un conjunto es convexo sii toda combinación convexa de dos puntos cualesquiera pertenece al conjunto.
La palabra "convexo" se usa para referirse a conjuntos, combinaciones y (lo veremos más adelante) funciones. En todos los casos son conceptos distintos, que bien podrían llamarse de otra forma.



Fuente: Chiang y Wainwright (2005) pág. 327.

Los dos conjuntos de la derecha no son convexos, los otros tres sí son convexos.

Bibliografía

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw-Hill Education.

Pastor, J., Trejo, C. & Calleja, P. (1969a). *Análisis matemático vol. 1*. Kapelusz.

Pastor, J., Trejo, C. & Calleja, P. (1969b). *Análisis matemático vol. 2*. Kapelusz.

Rojo, A. (1995). *Algebra II*. El Ateneo.

Transformaciones lineales

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Transformaciones lineales

Sean $(V, +, K, \cdot)$ y $(W, +, K, \cdot)$ dos espacios vectoriales (EVs) sobre un mismo cuerpo K.

Definición

Una función $f : V \to W$ es una transformación lineal sii para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y para todo $\alpha \in K$:

1. La imagen de la suma de dos vectores es igual a la suma de sus imágenes
   $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
2. La imagen del producto un vector por un escalar es igual al producto de la imagen del vector por ese escalar
   $f(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x})$

Estas dos condiciones se pueden resumir en una sola:

Definición

Una función $f : V \to W$ es una transformación lineal sii para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y para todo $\alpha \in K$:

$$f(\alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x}) + \alpha \cdot f(\mathbf{y})$$

Informalmente decimos que una transformación lineal pasa a través de la suma y del producto.

Transformaciones lineales

Teorema

Sea $f : V \to W$ una TL, $\mathbf{x}^i$ vectores pertenecientes al EV V, y α_i escalares del cuerpo K. Entonces se verifica que:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbf{x}^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f\left(\mathbf{x}^i\right)$$

Este teorema dice que las transformaciones lineales preservan las combinaciones lineales.
Se demuestra por inducción completa

Demostración: Veamos si se cumple para $n = 1$.

$$f(\alpha_1 \cdot \mathbf{x}^1) = \alpha_1 \cdot f(\mathbf{x}^1)$$

por el ítem 2 de la definición de una TL.
Veamos que si suponemos que se cumple para un $n = k$, entonces se cumple para $n = k + 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot \mathbf{x}^i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \mathbf{x}^i + \alpha_{k+1} \cdot \mathbf{x}^{k+1}\right) =$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \mathbf{x}^i\right) + f\left(\alpha_{k+1} \cdot \mathbf{x}^{k+1}\right) \qquad \text{por ítem 1}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot f\left(\mathbf{x}^i\right)}_{\text{por hipótesis de inducción}} + \underbrace{\alpha_{k+1} \cdot f\left(\mathbf{x}^{k+1}\right)}_{\text{por ítem 2}} = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot f(\mathbf{x}^i) \quad \square$$

Ejemplo 1:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una función definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3)$.
Comprobemos si es TL:

1.
   - $f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 - a_3 - b_3 \\ a_2 + b_2 - a_3 - b_3 \end{bmatrix}$
   - $f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 - a_3 \\ a_2 - a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - b_3 \\ b_2 - b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 - a_3 - b_3 \\ a_2 + b_2 - a_3 - b_3 \end{bmatrix}$

   Las dos expresiones son iguales
2.
   - $f\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \alpha\, a_1 \\ \alpha\, a_2 \\ \alpha\, a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha\, a_1 - \alpha\, a_3 \\ \alpha\, a_2 - \alpha\, a_3 \end{bmatrix}$
   - $\alpha\, f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} a_1 - a_3 \\ a_2 - a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, a_1 - \alpha\, a_3 \\ \alpha\, a_2 - \alpha\, a_3 \end{bmatrix}$

   Las dos expresiones son iguales

Es una TL.

Ejemplo 2: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una función definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3 + 1)$. Comprobemos si es TL:

2.
   - $f\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \alpha\, a_1 \\ \alpha\, a_2 \\ \alpha\, a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha\, a_1 - \alpha\, a_3 \\ \alpha\, a_2 - \alpha\, a_3 + 1 \end{bmatrix}$
   - $\alpha\, f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} a_1 - a_3 \\ a_2 - a_3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, a_1 - \alpha\, a_3 \\ \alpha\, a_2 - \alpha\, a_3 + \alpha \end{bmatrix}$

   Las dos expresiones no son iguales.

Por lo tanto, no es una TL.

Matriz asociada a la TL

Teorema

Si V y W son EVs de dimensión finita, entonces toda TL de V a W tiene una matriz asociada.

Demostración:
Sea $\{\mathbf{v}^1, \cdots, \mathbf{v}^n\}$ un conjunto de n vectores que conforman la base de V, y $\{\mathbf{w}^1, \cdots, \mathbf{w}^m\}$ un conjunto de m vectores que conforman la base de W.
Como $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ y $\mathbf{x} \in V$

$$\mathbf{y} = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbf{v}^i\right)$$

Como f es TL

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f\left(\mathbf{v}^i\right)$$

Como $f(\mathbf{v}^i) \in W$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot \mathbf{w}^j\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \cdot a_{ij} \cdot \mathbf{w}^j\right)$$

Matriz asociada a la TL

Como n y m son finitos se pueden intercambiar las sumatorias

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a_{ij} \right) \cdot \mathbf{w}^j$$

Pero por otro lado, $\mathbf{y} \in W$, entonces

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{w}^j$$

Comparando estas dos expresiones vemos que

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a_{ij} \qquad \forall j = 1, \cdots, m$$

Esta sumaproducto de escalares es un producto de matrices.

Matriz asociada a la TL

Sea la matriz:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$[\beta_j]_{m\times 1} = \mathbf{A}_{m\times n} \times [\alpha_i]_{n\times 1} \quad \square$$

La matriz **A** es la matriz asociada a la transformación. Su dimensión es $m \times n = dim(W) \times dim(V)$.

Para calcularla hay que:

1. calcular las imágenes por f de los vectores de la base del espacio de partida,
2. expresar estas imágenes en términos de la base del espacio de llegada, y
3. finalmente transponer esa matriz de coeficientes.

La matriz asociada a la TL está multiplicando al vector $[\alpha_i]_{n\times 1}$, cuyos elementos son las coordenadas del vector del dominio respecto a la base v.

Observación

Si se trabaja en la base canónica esas coordenadas son iguales al vector.

Matriz asociada a la TL

Corolario

Toda matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ representa una TL de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Demostración: Inmediata a partir de las definiciones de suma y producto de matrices $\square$.

Estos dos teoremas nos dicen que hay una identificación entre una matriz real y una TL entre espacios euclídeos. Toda TL entre euclídeos se puede representar como una matriz real, y toda matriz real representa una TL entre euclídeos.

Observación

La propiedad clave en ambas demostraciones es que las TL preservan las combinaciones lineales.

Matriz asociada a la TL

Ejemplo 1 (cont.): Vamos a determinar la matriz asociada a $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3)$ respecto a las bases canónicas del dominio y del codominio

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Entonces la matriz asociada a la TL es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Matriz asociada a la TL: cambio de base

Antes de seguir al próximo tema, una definición...

Definición

Sean **A** y **B** dos matrices de dimensión $m \times n$. Decimos que **B** es equivalente a **A** sii **B** puede obtenerse efectuando un número finito de operaciones elementales sobre **A**.

Recuérdese que las operaciones elementales incluyen:

1. Permutar dos filas o columnas entre sí.
2. Sumar una fila o columna a otra.
3. Multiplicar una fila o columna por un escalar no nulo.

Teorema

Las matrices **A** y **B** de dimensión $m \times n$ son equivalentes sii existen matrices no singulares **P** y **Q** tales que $\mathbf{B} = \mathbf{P}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q}$

La matriz **P** representa la aplicación de operaciones elementales sobre las filas de la matriz **A**, mientras que **Q** las representa sobre las columnas.

Matriz asociada a la TL: cambio de base

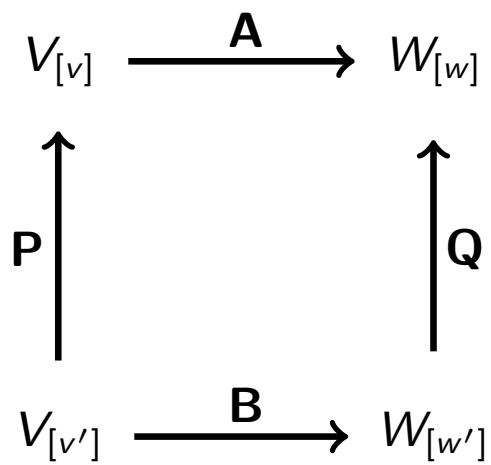
Dada una TL $f : V \to W$, su matriz asociada depende de las especificaciones de las bases V y W. Si cambia una de ellas, la matriz asociada también cambiará, pero hay una relación entre ambas matrices.

Sean $[v]$ y $[v']$ bases del dominio, y $[w]$ y $[w']$ bases del codominio. Cada vector $\mathbf{x} \in V$ e $\mathbf{y} \in W$ tendrá coordenadas $\mathbf{X}_{[v]}$, $\mathbf{X}_{[v']}$, $\mathbf{Y}_{[w]}$ y $\mathbf{Y}_{[w']}$ respectivamente, asociadas a cada uno de las bases.

Teorema

Las matrices asociadas a una misma TL con bases distintas son matrices equivalentes.

Demostración: Sean **A** y **B** matrices asociadas a la transformación f, para los dos pares de bases del dominio y codominio. A su vez, sean **P** y **Q** matrices de paso en V y W respectivamente.



Matriz asociada a la TL: cambio de base

Entonces

$$\mathbf{X}_{[v]} = \mathbf{P}\,\mathbf{X}_{[v']}$$
$$\mathbf{Y}_{[w]} = \mathbf{Q}\,\mathbf{Y}_{[w']}$$
$$\mathbf{Y}_{[w]} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}_{[v]}$$
$$\mathbf{Y}_{[w']} = \mathbf{B}\,\mathbf{X}_{[v']}$$

De las ecuaciones 2 y 3

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{Y}_{[w']} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}_{[v]}$$

Por la primer ecuación

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{Y}_{[w']} = \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{X}_{[v']}$$

Por la última ecuación

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{B}\,\mathbf{X}_{[v']} = \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{X}_{[v']}$$

Finalmente

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P} \quad \square$$

Este teorema nos brinda una forma rápida de efectuar un cambio de base para una TL mediante el producto de matrices, sin necesidad de realizar todos los cálculos de nuevo.

Matriz asociada a la TL: cambio de base

Ejemplo 1 (cont.): Obtengamos la matriz asociada a la TL en la nueva base $[v'] = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ del dominio, y en la nueva base $[w'] = \{(2,0),(0,1)\}$ del codominio.

Las matrices de cambio de base **P** y **Q** se obtienen hallando las coordenadas de la vieja base ($[v']$) en función de la nueva ($[v]$), y listando estas coordenadas como vectores columna. Para **Q** sería

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Obtenemos $\alpha_1 = 2, \beta_1 = 0, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para **P** sería

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \gamma_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \gamma_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \beta_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \gamma_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz asociada a la TL: cambio de base

Observación

Cuando la nueva base es la canónica, las matrices de paso simplemente tienen los vectores de la vieja base como columna.

La matriz $\mathbf{B}$ asociada a la misma TL que $\mathbf{A}$ pero en distinta base es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, dado un vector $\mathbf{x}_{[v']}$

$$\underbrace{\underbrace{\mathbf{B}\,\mathbf{x}_{[v']} = \mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}}_{\text{Aplica la TL}}\,\underbrace{\mathbf{P}\,\mathbf{x}_{[v']}}_{\text{Convierte a base canónica}}}_{\text{Convierte a la nueva base}} = \mathbf{Y}_{[w']}$$

Núcleo e imagen

Sea $f : V \to W$ una TL.

Definición

El núcleo de la TL es el subconjunto del dominio cuyos elementos tienen por imagen al vector nulo del codominio.

$$N(f) = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W\}$$

Definición

La imagen de la TL es el subconjunto del codominio cuyos elementos son alcanzados por la TL.

$$I(f) = \{\mathbf{y} \in W : \exists \mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$$

Núcleo e imagen

Teorema

El núcleo de toda TL es un subespacio vectorial del dominio.

Demostración: Rojo (1995) pág. 74.

Teorema

La imagen de toda TL es un subespacio vectorial del codominio.

Demostración: Rojo (1995) pág. 75.
La dimensión del núcleo se denota $dim\, N(f)$ y recibe el nombre de nulidad de la TL.
La dimensión de la imagen se denota $dim\, I(f)$ y recibe el nombre de rango de la TL.

Teorema rango-nulidad

Si V tiene dimensión finita, entonces

$$dim\, V = dim\, N(f) + dim\, I(f)$$

Demostración: Rojo (1995) págs. 80-82.

Núcleo e imagen

Ejemplo 1 (cont.): Vamos a hallar el núcleo de $f\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \end{bmatrix}^T$.

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array}$$

$$N(f) = \{(1,1,1)\}$$

$$dim\, N(f) = 1$$

Vamos a hallar la imagen de f.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como el vector $\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}^T = -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T - 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ es linealmente dependiente, la imagen es $\mathbb{R}^2$ y la dimensión de la imagen es 2.
Nótese que $dim\, N(f) + dim\, I(f) = 3$, que es la dimensión del dominio.

Transformaciones lineales ortogonales

Definición

Una TL $f : V \to V$ es ortogonal sii $\langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle = \langle f(\mathbf{v}^1), f(\mathbf{v}^2) \rangle$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

Las TLs ortogonales preservan el producto interior de los vectores.

Teorema

Si f es una TL ortogonal, entonces para todo $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \in V$:

1. $||\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2|| = ||f(\mathbf{v}^1) - f(\mathbf{v}^2)||$
   Se preserva la distancia entre vectores.
2. $\cos \angle(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) = \cos \angle(f(\mathbf{v}^1), f(\mathbf{v}^2))$
   Preserva los ángulos entre vectores.
3. El núcleo de f, $N(f)$, es el vector nulo; y por lo tanto, la nulidad es cero.
4. Como la nulidad es cero, el rango es igual a la dimensión del dominio.
5. Como el rango es completo, y f es un endomorfismo, entonces siempre existe una TL inversa f^{-1}; que además siempre es ortogonal.

Transformaciones lineales ortogonales

Observación

Como preservan normas, distancias y ángulos, las TLs ortogonales simplemente rotan los vectores en torno al origen de coordenadas de V.

Las TLs ortogonales tiene asociada una matriz ortogonal.

Definición

Una matriz cuadrada es ortogonal sii está formada por vectores ortonormales.

Los vectores ortonormales son aquellos que son: i) ortogonales y ii) normales.
A partir de esta definición se desprende otra definición alternativa.

Definición

Una matriz cuadrada es ortogonal sii su inversa es igual a su traspuesta.

Proposición

Las matrices ortogonales tienen determinante igual a 1 o a -1.

Transformaciones lineales ortogonales

Ejemplo 2: Vamos a evaluar si la siguiente matriz es ortogonal

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Primero vemos si los vectores columna son ortogonales

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Son ortogonales.
Veamos si tienen norma unitaria

$$\left\| \begin{matrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{matrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

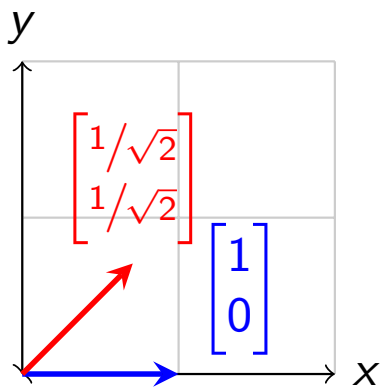
$$\left\| \begin{matrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{matrix} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Son ortonormales, y por lo tanto, $\mathbf{Q}$ es ortogonal.

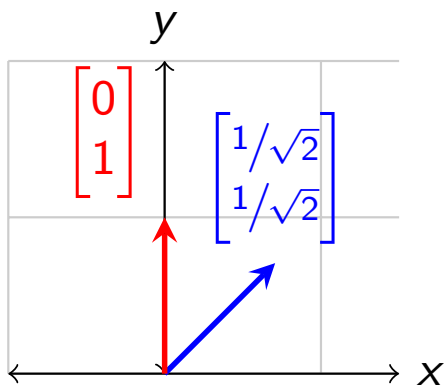
Transformaciones lineales ortogonales

La matriz $\mathbf{Q}$ rota los vectores 45 grados alrededor del origen.

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Una aclaración

En el análisis matemático una función lineal es

$$f(x) = ax + b$$

Si la función es de dos variables (en el dominio) como en AM2

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

Si es de n variables (en el dominio)

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

Si es de n variables en el dominio y m en el codominio

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1}$$

Una aclaración

Pero en esta clase vimos que una función lineal era solo

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Hay un abuso del término lineal en matemáticas, a veces para referirse a (1), y otras a (2). En análisis matemático predomina (1), mientras que en álgebra, (2). De hecho, en álgebra a (1) se le denomina transformación afín, que incluye a todas las transformaciones lineales, pero también a los desplazamientos del origen. Por lo tanto, es un concepto más general.
Técnicamente lo más correcto sería llamar funciones o transformaciones lineales a (2), y funciones o transformaciones afines a (1).
En este curso vamos a usar ambos términos. En general cuando hablamos de transformación lineal nos referimos a (2), y por función lineal entendemos (1).

Bibliografía

Rojo, A. (1995). *Algebra II* [Caps. 3 y 7]. El Ateneo.

Diagonalización

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Valores y vectores propios

Sean $(V, +, K, \cdot)$ un EV y $f : V \to V$ una TL con matriz asociada $\mathbf{A}$

Definición

El escalar λ es un valor propio de $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ sii existe un vector no nulo $\mathbf{x} \in K^{n \times 1}$ tal que

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \tag{1}$$

Al vector $\mathbf{x}$ lo llamamos vector propio asociado a λ.

Al valor propio también se lo suele llamar autovalor, valor característico o eigenvalor.
Mientras que al vector propio, autovector, vector característico o eigenvector.
Despejando (1):

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

que representa un sistema lineal homogéneo.Como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = 0$$

para que el sistema tenga solución no trivial.
El desarrollo de $|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}|$ es un polinomio de grado n en $(-\lambda)$ que se llama polinomio característico de $\mathbf{A}$ y ecuación característica de $\mathbf{A}$ cuando se lo iguala a $\mathbf{0}$.

Valores y vectores propios

Las raíces de $|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = 0$ son los valores propios de $\mathbf{A}$
Las soluciones no triviales de $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ cuando λ es un valor propio de $\mathbf{A}$, son los vectores propios asociados a ese valor propio.

Ejemplo 1: Determinemos los autovalores y autovectores de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

Los valores propios son:

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 4$$

Valores y vectores propios

Ahora busquemos los autovectores asociados a cada autovalor

- Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -2 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

Entonces el vector propio es

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valores y vectores propios

- Para $\lambda_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 = -2x_2$$

Entonces el vector propio es

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valores y vectores propios

Del ejemplo anterior vemos que los dos vectores propios son LI. Esto no es casualidad:

Teorema

Los vectores propios asociados a valores propios distintos son LI.

Demostración: Lo vamos a demostrar por inducción completa.
Sea $\mathbf{x}^i$ el vector propio asociado al valor propio λ_i de la matriz $\mathbf{A}$.
Veamos que se cumple para $n = 1$. En este caso tenemos un solo vector propio. Por lo tanto, se cumple trivialmente.
Ahora veamos que si se cumple para $n = k - 1$ (hipótesis de inducción), entonces se cumple para $n = k$.
Consideremos la ecuación

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \tag{2}$$

Premultiplicando por $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i (\mathbf{A}\,\mathbf{x}^i) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i (\lambda_i \cdot \mathbf{x}^i) = \mathbf{0} \tag{3}$$

Valores y vectores propios

Por otro lado, premultiplicando (2) por λ_k:

$$\lambda_k \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i (\lambda_k \cdot \mathbf{x}^i) = \mathbf{0} \tag{4}$$

Restando (3) y (4) miembro a miembro:

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i (\lambda_i - \lambda_k) \mathbf{x}^i = \mathbf{0}$$

Como los $\mathbf{x}^i$ para $i = 1, \cdots, k-1$ son LI por hipótesis de inducción:

$$c_i (\lambda_i - \lambda_k) = 0 \qquad \forall i = 1, \cdots, k-1 \tag{5}$$

Además tenemos que $\lambda_i \neq \lambda_k$ para $i = 1, \cdots, k-1$. Entonces:

$$c_i = 0 \qquad \forall i = 1, \cdots, k-1 \tag{6}$$

De (6) y (2) tenemos que

$$c_k \cdot \mathbf{x}^k = \mathbf{0}$$

Pero como el vector propio no puede ser nulo

$$c_k = 0 \quad \square$$

Polinomio característico

Sea $P(-\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}|$ el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$:

$$P(-\lambda) = (-\lambda)^n + \alpha_1(-\lambda)^{n-1} + \alpha_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}(-\lambda) + \alpha_n$$

Teorema

Los coeficientes α_i para todo $i = 1, \cdots, n$ son iguales a:

- La suma de todos los menores de orden i de $\mathbf{A}$ que contienen en su diagonal principal elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}$.
- La suma de todos los productos posibles de los valores propios λ_i de $\mathbf{A}$ tomados de i en i.

Esto hace que como caso particular α_1 sea igual a:

- $tr(\mathbf{A})$
- $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

y α_n sea igual a:

- $|\mathbf{A}|$
- $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

Polinomio característico

Ejemplo 1 (cont.):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

y los autovalores eran 1 y 4.

$$tr(\mathbf{A}) = 5$$

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 5$$

$$|\mathbf{A}| = 4$$

$$\prod_{i=1}^{2} \lambda_i = 4$$

Entonces podemos reconstruir el polinomio característico:

$$P(-\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Acotación de los valores propios

Teorema

Sea λ_i un valor propio de $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, $F = \max_i F_i$ con $F_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, y $C = \max_j C_j$ con $C_j = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.
Entonces $|\lambda_i| \leq \min\{C, F\}$

Demostración: Sea λ un valor propio cualquiera de $\mathbf{A}$. Entonces existe un vector propio $\mathbf{x}$ tal que $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$. Escribiendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\lambda\, x_1 &= a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n \\
\lambda\, x_2 &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n \\
&\cdots \\
\lambda\, x_n &= a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n
\end{aligned}$$

Acotación de los valores propios

Aplicando módulo miembro a miembro y usando la propiedad de desigualdad triangular:

$$
\begin{aligned}
|\lambda|\,|x_1| &\leq |a_{11}|\,|x_1| + |a_{12}|\,|x_2| + \cdots + |a_{1n}|\,|x_n| \\
|\lambda|\,|x_2| &\leq |a_{21}|\,|x_1| + |a_{22}|\,|x_2| + \cdots + |a_{2n}|\,|x_n| \\
&\cdots \\
|\lambda|\,|x_n| &\leq |a_{n1}|\,|x_1| + |a_{n2}|\,|x_2| + \cdots + |a_{nn}|\,|x_n|
\end{aligned}
$$

Sumando miembro a miembro las n ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
|\lambda|\,(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|) &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|\,|x_1| + \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|\,|x_2| + \cdots + \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|\,|x_n| \\
&\leq C_1\,|x_1| + C_2\,|x_2| + \cdots + C_n\,|x_n| \\
&\leq C\,|x_1| + C\,|x_2| + \cdots + C\,|x_n| \\
&\leq C\,(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)
\end{aligned}
$$

Acotación de los valores propios

Y como el vector $\mathbf{x}$ es no nulo se concluye que

$$|\lambda| \leq C$$

Repitiendo la demostración para $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}$ (recordar que los valores propios de la traspuesta son los mismos) se demuestra también que $|\lambda| \leq F$.
Como ambas cosas deben ocurrir al mismo tiempo, entonces

$$|\lambda| \leq \text{mín}(C, F)$$

y esto es cierto para todos los valores propios de $\mathbf{A}$ ya que λ era un autovalor cualquiera
□

Matrices semejantes

Definición

Dos matrices cuadradas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son semejantes, o $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, sii existe una matriz no singular $\mathbf{P}$ tal que se verifica

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$$

Observación

Las definiciones de matrices semejantes y equivalentes son parecidas. Sin embargo, la semejanza se define para matrices cuadradas y es un concepto más restrictivo. Toda matriz semejante es equivalente, pero la recíproca no es cierta.

Las matrices semejantes tienen las siguientes propiedades:

- Son transitivas, es decir si $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$ entonces $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.
- Sus potencias también son semejantes, es decir si $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{A}^n \sim \mathbf{B}^n$
- Tienen el mismo polinomio característico.
- Tienen los mismos autovalores y autovectores.
- Tienen la misma traza, rango y determinante.

Además como la semejanza de matrices es un caso especial de la equivalencia de matrices, las matrices semejantes representan la misma transformación lineal.

Diagonalización de matrices

Definición

Una matriz cuadrada $\mathbf{A}_{[n\times n]}$ es diagonalizable sii es semejante a una matriz diagonal Λ que tiene en la diagonal principal los valores propios de $\mathbf{A}$. Es decir, sii existe una matriz no singular $\mathbf{P}$ tal que

$$\Lambda = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}$$

A la matriz $\mathbf{P}$ se la llama matriz de paso o modal.

Teorema

Una matriz $\mathbf{A}_{[n\times n]}$ es diagonalizable sii admite n vectores propios linealmente independientes.

La matriz $\mathbf{P}$ se conforma con los n vectores propios LI, ordenados como vectores columna de acuerdo a los valores propios en Λ.

Observación

Diagonalizar una matriz es cambiar la base de la TL a una que está conformada por los vectores propios de la matriz. Para que los vectores propios conformen una base se necesita que sean n y sean LI, que es la condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable.

Diagonalización de matrices

Para que una matriz sea diagonalizable, cada autovalor con orden de multiplicidad m debe tener m autovectores LI asociados.
El siguiente teorema nos da una condición para determinar si esto es posible.

Teorema

$\mathbf{A}_{[n\times n]}$ es diagonalizable sii a cada valor propio λ_i con orden de multiplicidad m le corresponde un sistema $\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}$ cuyo rango es igual a $n - m$.

Demostración: El producto $(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})\,\mathbf{x}$ es una TL de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Los vectores propios asociados a λ_i son parte del núcleo de esta TL.
Por el teorema rango-nulidad:

$$n = dim\, N(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}) + dim\, I(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})$$

Entonces como queremos que $dim\, N(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}) = m$, el rango de la matriz $\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}$ debe ser igual a $n - m$ $\square$

Diagonalización de matrices

Ejemplo 1 (cont.): La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable porque admite 2 vectores LI. Los vectores propios asociados a los autovalores 1 y 4 eran:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente.
Entonces

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de matrices

Ejemplo 2: Vamos a determinar si la siguiente matriz es diagonalizable

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{B} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz es 2 pero debería ser $n - m = 3 - 3 = 0$. El único vector LI de la matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz no es diagonalizable.

Diagonalización de matrices

Ejemplo 3:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{C} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -4 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

Veamos si podemos extraer dos vectores LI de 1:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz tiene rango 1, que es igual a $n - m = 3 - 2 = 1$. Por lo tanto, se pueden extraer dos vectores LI, que son:

Diagonalización de matrices

$$-4x_1 - 4x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$$

Si $x_2 = 0$ y $x_3 = -1$ entonces

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$ entonces

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector propio correspondiente al autovalor -1 es LI respecto a estos dos porque está asociado a un autovalor distinto.

$$\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz $\mathbf{C}$ es diagonalizable, y su forma diagonal es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de matrices simétricas

Las matrices simétricas presentan algunas propiedades interesantes en lo que respecta a su diagonalización.

Proposición

Los valores propios de una matriz simétrica real son todos reales.

Proposición

Los vectores propios asociados a diferentes valores propios de una matriz simétrica son ortogonales.

Demostración: Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica real, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalores de $\mathbf{A}$, y $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ los vectores propios asociados respectivamente.
Entonces

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}^1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}^1$$
$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}^2 = \lambda_2 \cdot \mathbf{x}^2$$

Por definición de producto interior:

$$\langle \mathbf{A}\,\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \rangle = (\mathbf{A}\,\mathbf{x}^1)^T\,\mathbf{x}^2 = (\mathbf{x}^1)^T\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{x}^2 = (\mathbf{x}^1)^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}^2 = \langle \mathbf{x}^1, \mathbf{A}\,\mathbf{x}^2 \rangle$$

Diagonalización de matrices simétricas

Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{A}\,\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \rangle = \langle \mathbf{x}^1, \mathbf{A}\,\mathbf{x}^2 \rangle$$
$$\langle \lambda_1 \cdot \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \rangle = \langle \mathbf{x}^1, \lambda_2 \cdot \mathbf{x}^2 \rangle$$
$$\lambda_1 \langle \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \rangle$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \rangle = 0$$

Pero como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces

$$\langle \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \rangle = 0 \quad \square$$

Proposición

Toda matriz simétrica real es diagonalizable sobre el campo de los reales con una matriz de paso ortogonal.

Diagonalización de matrices simétricas

Proposición

Si una matriz real tiene una matriz de paso ortogonal que la diagonaliza, entonces es simétrica.

Demostración: Por un lado tenemos que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^{-1}$$

Por el otro:

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^{-1})^T = (\mathbf{P}^{-1})^T \Lambda^T \mathbf{P}^T = (\mathbf{P}^T)^T \Lambda \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A} \quad \square$$

Por las dos proposiciones anteriores:

Una matriz real es diagonalizable por una matriz de paso ortogonal sii es simétrica

Diagonalización de matrices simétricas

Ejemplo 4: Diagonalicemos la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de matrices simétricas

Estos vectores propios son ortogonales. Para armar la matriz de paso ortogonal necesitamos que sean ortonormales. Por ello se normalizan:

$$\|\mathbf{x}^1\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \|\mathbf{x}^2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\bar{\mathbf{x}}^1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \bar{\mathbf{x}}^2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apéndice: cálculo de vectores propios por adjuntos

Antes vamos a enunciar una propiedad que nos resultará útil:

Propiedad del rango del producto de matrices

Sean las matrices $\mathbf{X}_{[m\times p]}$ e $\mathbf{Y}_{[p\times n]}$ tales que verifican $\mathbf{X}_{[m\times p]}\,\mathbf{Y}_{[p\times n]} = \mathbf{0}_{[m\times n]}$. Entonces $r(\mathbf{Y}) \leq p - r(\mathbf{X})$

Ahora sí vamos a demostrar la siguiente proposición

Proposición

Cuando λ_i es raíz simple de la ecuación característica de $\mathbf{A}$, entonces la adjunta de la matriz $(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})$ tiene rango 1.

Demostración: Por definición de matriz adjunta

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})\,[adj(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})] = |\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}|\ \mathbf{I}_{[n\times n]}$$

Como λ_i es valor propio de $\mathbf{A}$, el determinante es cero:

$$|\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}|\ \mathbf{I}_{[n\times n]} = \mathbf{0}_{[n\times n]}$$

Apéndice: cálculo de vectores propios por adjuntos

Si λ_i tiene orden de multiplicidad 1 entonces:

$$r(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}) = n - 1$$

porque la cantidad de columnas de $\mathbf{A}$ es n y la dimensión del núcleo de $\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}$ es 1.
Por la propiedad del rango del producto de matrices:

$$r\left[adj(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})\right] \leq n - (n - 1) = 1$$

Como el rango de $adj(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})$ no puede ser cero, se concluye que su rango es 1 □

Entonces, como $(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})\left[adj(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})\right] = \mathbf{0}_{[n \times n]}$, cualquier columna de $adj(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I})$ es vector propio de $\mathbf{A}$ asociado a λ_i.

Esta propiedad nos da una forma más rápida de calcular los vectores propios cuando el valor propio es raíz simple.

Bibliografía

Bernardello, A., Bianco, M. J., Casparri, M. T., García Fronti, J. & Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática para Economistas con Excel y Matlab* [Cap. 1.2]. Omicron System.

Rojo, A. (1995). *Algebra II* [Cap. 8]. El Ateneo.

Estática comparativa

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Estática comparativa

En estática comparativa estamos de un equilibrio inicial y nos preguntamos cómo cambia ese equilibrio ante un cambio en algún parámetro o variable exógena.
Esta "comparativa" entre dos equilibrios es estática porque no se estudia el proceso de ajuste al nuevo equilibrio.Esto es una limitación de la metodología ya que no se pregunta cuánto tiempo se tarda en llegar a ese equilibrio o si el equilibrio es estable.
Esencialmente se trata de encontrar una tasa de cambio de alguna variable endógena frente a alguna variable exógena.
Ejemplo 1: Considere el siguiente modelo de ingreso nacional de una economía:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 & \\ C = \alpha + \beta\,(Y - T) & (\alpha > 0,\ 0 < \beta < 1) \\ T = \gamma + \delta\, Y & (\gamma > 0,\ 0 < \delta < 1) \end{cases}$$

En este modelo las variables endógenas son Y, C y T; las variables exógenas con I_0 y G_0, y los parámetros son α, β, γ y δ.
El valor de equilibrio del ingreso es

$$Y^* = \frac{\alpha - \beta\,\gamma + I_0 + G_0}{1 - \beta + \beta\,\delta}$$

Estática comparativa

Una pregunta típica de estática comparativa sería: ¿Cómo cambia el ingreso frente a un cambio en el gasto público?

$$\frac{\partial Y^*}{\partial G_0} = \frac{1}{1-\beta+\beta\,\delta} > 0$$

o ¿Cómo cambia el ingreso frente a un cambio en cambio en la propensión marginal a consumir?

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \beta} = \frac{Y^*\,(1-\delta)-\gamma}{1-\beta+\beta\,\delta} > 0$$

Pero no siempre vamos a tener un modelo en el cual la solución de equilibrio pueda escribirse en forma explícita.

Funciones implícitas

Una función que está escrita en la forma $y = f(x)$ se llama una función explícita. Por ejemplo: $y = 3x^4$.
Mientras que si se la escribe como $F(x, y) = 0$ se dice que es una función implícita. Por ejemplo: $y - 3x^4 = 0$.
Algunas funciones no pueden escribirse en forma explícita. Por ejemplo:
$y - \sin(y) + x^2 \cos(x) = 0$

Funciones implícitas

Teorema de la función implícita

Dado un sistema de ecuaciones en forma implícita:

$$\begin{aligned} F^1(y_1, \cdots, y_n; x_1, \cdots, x_m) &= 0 \\ F^2(y_1, \cdots, y_n; x_1, \cdots, x_m) &= 0 \\ &\cdots \\ F^n(y_1, \cdots, y_n; x_1, \cdots, x_m) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Si todas las funciones $F^1, \cdots, F^n$ tienen derivadas parciales continuas respecto a todas las $n+m$ variables $(y_1, y_2, \cdots, y_n; x_1, x_2 \cdots, x_m)$ en un entorno del punto $(y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0; x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ en el cual se satisface (1).
Y el jacobiano de las F^i respecto de las y_i

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \frac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

es no nulo en el punto $(y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0; x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$.

Teorema de la función implícita (cont.)

Entonces, existe un conjunto de funciones

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{2}$$

que en el entorno del punto $(y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0; x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ tienen valor único, son continuas, tienen derivadas parciales continuas y son las únicas funciones que satisfacen (1).

Este teorema nos da una condición suficiente para considerar a las variables endógenas como función de las variables exógenas.

Estática comparativa

Partiendo de (1), sabemos por el teorema de la función implícita que las variables endógenas y_i son funciones continuamente diferenciables de las variables exógenas. Reemplazando (2) en (1):

$$
\begin{aligned}
&F^1(y_1(x_1, x_2, \cdots, x_m), y_2(x_1, x_2, \cdots, x_m), \cdots, y_n(x_1, x_2, \cdots, x_m); x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0 \\
&F^2(y_1(x_1, x_2, \cdots, x_m), y_2(x_1, x_2, \cdots, x_m), \cdots, y_n(x_1, x_2, \cdots, x_m); x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
&F^n(y_1(x_1, x_2, \cdots, x_m), y_2(x_1, x_2, \cdots, x_m), \cdots, y_n(x_1, x_2, \cdots, x_m); x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0
\end{aligned}
$$

Diferenciando totalmente este sistema respecto a alguna de las variables exógenas cuyo impacto queremos estudiar (en este caso x_1):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F^1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F^1}{\partial y_2}\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) + \cdots + \frac{\partial F^1}{\partial y_n}\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F^1}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial F^2}{\partial y_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F^2}{\partial y_2}\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) + \cdots + \frac{\partial F^2}{\partial y_n}\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F^2}{\partial x_1} = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
&\frac{\partial F^n}{\partial y_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F^n}{\partial y_2}\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) + \cdots + \frac{\partial F^n}{\partial y_n}\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F^n}{\partial x_1} = 0
\end{aligned}
$$

Estática comparativa

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \frac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_1} \\ \cdots \\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Todas las derivadas parciales están evaluadas en el punto $(y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0; x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$
Este es un sistema lineal de n ecuaciones en n incógnitas. Las incógnitas son las derivadas de cada variable endógena respecto a la variable exógena cuyo impacto queremos analizar. Por lo tanto, la solución del sistema nos dice cómo cambia cada una de las variables endógenas frente a un cambio en la variable exógena elegida.
Este sistema se resuelve por Cramer:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1} = \frac{|J_i|}{|J|}$$

Estática comparativa

Ejemplo 2: Sea el siguiente modelo IS-LM

$$\begin{cases} Y = C(Y - T(Y)) + I(r) + G_0 \\ L(Y, r) = M_0^s \end{cases}$$

Con $0 < C'(Y - T) < 1, 0 < 1 - T'(Y) < 1, I'(r) < 0, L'_Y > 0, L'_r < 0$

$$\begin{cases} Y - C(Y - T(Y)) - I(r) - G_0 = 0 \\ L(Y, r) - M_0^s = 0 \end{cases}$$

Vamos a analizar un cambio positivo del gasto público. Entonces diferenciamos totalmente el sistema respecto a G_0 en un entorno del punto de equilibrio (Y^*, r^*)

$$\begin{cases} \frac{dY}{dG_0} - C'(\cdot)(1 - T'(\cdot))\frac{\partial Y}{\partial G_0} - I'(\cdot)\frac{\partial r}{\partial G_0} - 1 = 0 \\ L'_Y(\cdot)\frac{\partial y}{\partial G_0} + L'_r(\cdot)\frac{\partial r}{\partial G_0} - \underbrace{\frac{\partial M_0^s}{\partial G_0}}_{=0} = 0 \end{cases}$$

Expresado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 - C'(\cdot)(1 - T'(\cdot)) & -I'(\cdot) \\ L'_Y(\cdot) & L'_r(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial r}{\partial G_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estática comparativa

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 - C'(\cdot)(1 - T'(\cdot)) & -I'(\cdot) \\ L'_Y(\cdot) & L'_r(\cdot) \end{vmatrix} = \underbrace{[1 - C'(\cdot)(1 - T'(\cdot))]}_{+} \underbrace{L'_r(\cdot)}_{-} + \underbrace{L'_Y(\cdot)}_{+} \underbrace{I'(\cdot)}_{-} < 0$$

Usando la regla de Cramer:

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I'(\cdot) \\ 0 & L'_r(\cdot) \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{L'_r(\cdot)}{|J|} > 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial G_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - C'(\cdot)(1 - T'(\cdot)) & 1 \\ L'_Y(\cdot) & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-L'_Y(\cdot)}{|J|} > 0$$

Un aumento del gasto público aumenta el producto y la tasa de interés.

Bibliografía

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* [Caps. 2, 3, 6, 7 y 8]. McGraw-Hill Education.

Matrices no negativas

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Algunas definiciones

Definición

Una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es no negativa sii todos sus elementos son no negativos.

Se suele notar $\mathbf{A} \geq 0$.

Definición

Una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es positiva sii todos sus elementos son mayores a cero.

Se suele notar $\mathbf{A} > 0$.

Definición

Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es reducible o descomponible sii es posible, mediante el intercambio simultáneo de filas y columnas, reducirla a la forma:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{A}_{11}$ y $\mathbf{A}_{22}$ son submatrices cuadradas y $\mathbf{0}$ es una submatriz nula.
Si esto no es posible se dice que la matriz es irreducible o no descomponible.

Algunas definiciones

El pasaje de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$ se realiza premultiplicando a $\mathbf{A}$ por una matriz de permutación (que es ortogonal por definición) y posmultiplicando por su traspuesta.

Observación

$\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ son matrices semejantes.

A estas matrices se les llama reducibles porque si consideramos un sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ donde $\mathbf{A}$ es reducible

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}$$

el subsistema $\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{c}_2$ se puede resolver en forma independiente del resto.
Hay una definición alternativa de matrices reducibles que es más operacional.

Definición

Una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es reducible o descomponible sii el conjunto formado por los números enteros de 1 a n, o sea $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ puede separarse en dos subconjuntos no vacíos I y J tales que:

1. $N = I \cup J,\ I \cap J = \emptyset$
2. $a_{ij} = 0$ para $i \in I,\ j \in J$

Algunas definiciones

Ejemplo 1: En la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

los elementos nulos son $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{34}, a_{41}, a_{43}$.
Podemos particionar el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4\}$ en $I = \{2, 4\}$ y $J = \{1, 3\}$ de modo que $a_{21}, a_{23}, a_{41}, a_{43}$ son nulos. Entonces la matriz es reducible.
Si intercambiamos las columnas 2 y 3, y las filas 2 y 3 (recordar que es un intercambio simultáneo):

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Algunas definiciones

También hay otra definición de irreducibilidad, que va a cobrar más sentido cuando veamos cadenas de Markov donde cada fila/columna de una matriz representan un estado.

Definición

Una cadena de Markov es irreducible sii es posible ir de cualquier estado a cualquier otra estado (no necesariamente en un paso).

Ejemplo 1 (cont.): Si consideramos a cada fila y columna como un estado:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

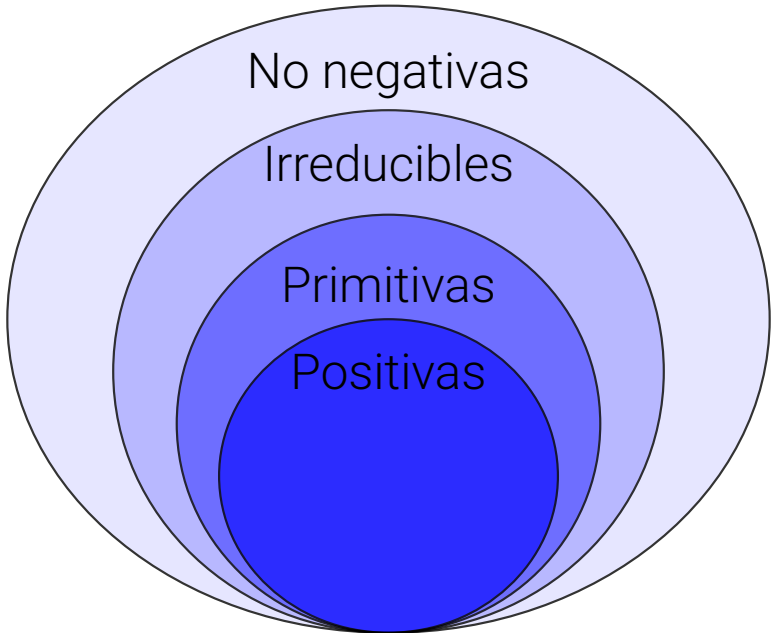
Vemos que el estado 1 está conectado directamente consigo mismo y con los estados 3 y 4. Y como el estado 4 está conectado con el estado 2, se puede ir del estado 1 a cualquier otro estado.
El estado 2 está conectado consigo mismo y con el estado 4. Y el estado 4 está conectado consigo mismo y con el estado 2. Entonces no se puede ir del estado 2 al estado 1 ni al estado 3. Por lo tanto, la cadena de Markov es reducible.

Algunas definiciones

Definición

Una matriz cuadrada no negativa $\mathbf{A}$ es primitiva o regular sii todos los elementos de una potencia de $\mathbf{A}$ son positivos. Es decir, $\mathbf{A}^h > 0$ para algún h.

Las matrices primitivas son matrices que se vuelven positivas después de elevarlas a alguna potencia.Obviamente, si $\mathbf{A}^h > 0$ entonces $\mathbf{A}^{h+1} > 0$.
Nótese que las matrices reducibles no pueden ser primitivas, ya que la submatriz de ceros persiste cuando se la eleva a cualquier potencia.



Algunos teoremas

Teorema de Perrón

Si $\mathbf{A}$ es primitiva entonces tiene un valor propio positivo r tal que es raíz simple de la ecuación característica y excede en módulo a los demás valores propios. A este valor propio r le corresponde un vector propio positivo

1er Teorema de Frobenius

Si $\mathbf{A}$ es no negativa e irreducible entonces tiene un valor propio positivo r tal que es raíz simple de la ecuación característica y no es superada en módulo por los demás valores propios. A este valor propio r le corresponde un vector propio positivo.

2do Teorema de Frobenius

Si $\mathbf{A}$ es no negativa entonces tiene un valor propio no negativo r que no es superado en módulo por los demás valores propios. A este valor propio r le corresponde un vector propio no negativo.

A la raíz r se le llama raíz maximal.

Algunos teoremas

TEOREMA	Aplica a	r^*		$\lvert r^* \rvert$	Vector propio
Perrón	Matrices primitivas	> 0	Simple, real y positiva	$> \lvert r \rvert$	$\mathbf{x}^* > 0$
1 F.	Matrices irreducibles no negativas	> 0	Simple, real y positiva	$\geq \lvert r \rvert$	$\mathbf{x}^* > 0$
2 F.	Matrices no negativas	≥ 0	Real y no negativa	$\geq \lvert r \rvert$	$\mathbf{x}^* \geq 0$

Matrices estocásticas

Definición

Un vector estocástico es un vector fila $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ tal que $p_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Definición

Una matriz cuadrada $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ es una matriz estocástica sii todas sus filas son vectores estocásticos

Las matrices estocásticas son matrices no negativas.

Los vectores estocásticos son vectores fila, a diferencia del resto del curso donde trabajamos con vectores columna

Matrices estocásticas

Proposición

Si **A** y **B** son dos matrices estocásticas entonces su producto **A B** es una matriz estocástica.

Teorema

Si **P** es una matriz estocástica entonces su raíz maximal es igual a 1.

Demostración: Como $\mathbf{P} \geq 0$ entonces por el 2do Teorema de Frobenius esta matriz tiene un valor propio maximal real y no negativo, que no es superado en módulo por los demás autovalores, y que está asociado a un vector propio no negativo. Sea r esta raíz maximal y w su vector propio asociado:

$$r \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w}\,\mathbf{P}$$

Matrices estocásticas

$$\begin{cases} r\, w_1 & = p_{11}\, w_1 + p_{21}\, w_2 + \cdots + p_{n1}\, w_n \\ r\, w_2 & = p_{12}\, w_1 + p_{22}\, w_2 + \cdots + p_{n2}\, w_n \\ \cdots & \\ r\, w_n & = p_{1n}\, w_1 + p_{2n}\, w_2 + \cdots + p_{nn}\, w_n \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro:

$$r(w_1 + w_2 + \cdots + w_n) = \underbrace{(p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1n})}_{=1}\, w_1 + \underbrace{(p_{21} + p_{22} + \cdots + p_{2n})}_{=1}\, w_2$$
$$+ \cdots + \underbrace{(p_{n1} + p_{n2} + \cdots + p_{nn})}_{=1}\, w_n$$

Como $\mathbf{w}$ es no negativo, la suma de sus componentes es estrictamente mayor a cero:

$$r = 1 \quad \square$$

Observación

Como la raíz maximal es 1 el resto de los autovalores de una matriz estocástica tienen módulo menor o igual a 1.

Matrices estocásticas

Definición

Un vector estocástico fijo de una matriz estocástica $\mathbf{P}$ es un vector estocástico $\mathbf{w}$ que cumple

$$\mathbf{w}\,\mathbf{P} = \mathbf{w}$$

Es el vector propio estocástico asociado a la raíz maximal $\mathbf{1}$. Toda matriz estocástica tiene al menos un vector fijo.
Este vector tiene singular importancia porque representa el equilibrio.

Matrices estocásticas

Ejemplo 2: Dado $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ vamos a calcular su vector estocástico fijo:

$$\mathbf{P} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

obtenemos el vector propio asociado al valor propio 1:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow w_1 = 2/3 w_2$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Observación

El vector estocástico fijo no tiene por qué ser único. El 2do Teorema de Frobenius no afirma que la raíz 1 sea simple, por lo tanto puede haber más de un vector estocástico fijo. Sin embargo cuando la matriz es irreducible, ahí se aplica el 1er Teorema de Frobenius, que sí nos permite afirmar que el vector fijo es único.

Cadenas de Markov

Las matrices estocásticas se usan para representar cadenas de Markov finitas.

Definición

Una cadena de Markov es un proceso estocástico en el cual la probabilidad de una prueba solo depende del resultado de la prueba precedente.

Ejemplo 3: Supongamos que hay dos empresas, A y B que compiten en el rubro automotriz. En el momento $t = 0$ hay 100 empleados en cada una. Se conoce que la probabilidad de que un empleado en A se quede en A es $0{,}7$ y de que se vaya a trabajar a B es $0{,}3$, mientras que la probabilidad de que un empleado en B se quede en B es $0{,}6$ y de que se vaya a trabajar a A es $0{,}4$.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Esta matriz estocástica representa la transición de empleados entre A y B.Si queremos saber cuál es la distribución de empleados en $t = 1$:

$$\mathbf{u}^0\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & 90 \end{bmatrix} = \mathbf{u}^1$$

Cadenas de Markov

y en $t = 2$

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^1 \mathbf{P} = \mathbf{u}^0 \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 113 & 87 \end{bmatrix}$$

en $t = 3$

$$\mathbf{u}^3 = \mathbf{u}^2 \mathbf{P} = \mathbf{u}^0 \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 113{,}9 & 86{,}1 \end{bmatrix}$$

en $t = 4$

$$\mathbf{u}^4 = \mathbf{u}^3 \mathbf{P} = \mathbf{u}^0 \mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 114{,}2 & 85{,}8 \end{bmatrix}$$

en $t = 5$

$$\mathbf{u}^5 = \mathbf{u}^4 \mathbf{P} = \mathbf{u}^0 \mathbf{P}^5 = \begin{bmatrix} 114{,}3 & 85{,}7 \end{bmatrix}$$

y para $t = n$

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^0 \mathbf{P}^n$$

En este ejemplo la probabilidad de permanecer en la empresa o de pasar a la otra es constante en el tiempo. Cuando esto ocurre decimos que la cadena de Markov es homogénea.Es lo que nos permite calcular los vectores de estado en $t > 1$ simplemente elevando la matriz estocástica a la potencia t.

Cadenas de Markov: distribución límite

Teorema

Sea $\mathbf{P}$ una matriz estocástica primitiva o regular. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{W}$$

donde la matriz $\mathbf{W}$ es una matriz que tiene en cada una de sus filas el vector estocástico fijo $\mathbf{w}$. Además, el vector $\mathbf{w}$ es positivo.

La demostración de este teorema se omite pero se remarca que surge de aplicar el Teorema de Perrón.

Cadenas de Markov: distribución límite

Como un corolario de este resultado:

Corolario

Sea $\mathbf{u}$ un vector estocástico cualquiera. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}\,\mathbf{P}^n = \mathbf{w}$$

Demostración: Por el teorema anterior:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}\,\mathbf{P}^n = \mathbf{u}\,\mathbf{W}$$

y como la suma de elementos de $\mathbf{u}$ es 1:

$$\mathbf{u}\,\mathbf{W} = \mathbf{w} \quad \square$$

Observación

Sin importar el vector de estado inicial, una cadena de Markov primitiva o regular termina en el largo plazo en su vector fijo.

Cadenas de Markov: distribución límite

Ejemplo 3 (cont.): La matriz de transición $\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$ es positiva y, por lo tanto, también es primitiva.
Su vector fijo es

$$\begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -0{,}4 \\ -0{,}3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}57143 \\ 0{,}42857 \end{bmatrix}$$

Como había 200 empleados en total, la distribución límite es

$$200 \begin{bmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114{,}3 \\ 85{,}7 \end{bmatrix}$$

muy parecido al valor de $\mathbf{u}^5$, que calculamos.
De hecho, las potencias de la matriz de transición son:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}48 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0{,}583 & 0{,}417 \\ 0{,}556 & 0{,}444 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 0{,}5749 & 0{,}4251 \\ 0{,}5668 & 0{,}4332 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 0{,}57247 & 0{,}42753 \\ 0{,}57004 & 0{,}42996 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^6 = \begin{bmatrix} 0{,}57174 & 0{,}42826 \\ 0{,}57101 & 0{,}42899 \end{bmatrix}$$

que se van aproximando a una matriz con el vector fijo en cada una de sus filas, tal como afirma el teorema.

Cadenas de Markov absorbentes

Definición

Un estado de una cadena de Markov es absorbente sii la probabilidad de permanecer en él es 1.

Ejemplo 4: Un borracho camina desde su casa al bar que queda a 4 cuadras. Si está en las esquinas de las cuadras 1, 2 o 3 camina hacia la izquierda o derecha con igual probabilidad. Mientras que si está en su casa o en el bar se queda ahí.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

El primer y último estado (casa y bar) son absorbentes.

Observación

Esta matriz tiene dos vectores estocásticos fijos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ asociados a la raíz unitaria.

Cadenas de Markov absorbentes

Dado que la cadena va a terminar en un estado absorbente, ¿cuál de los dos estados absorbentes es más probable?
Primero nótese que toda cadena absorbente tiene asociada una matriz estocástica reducible.Por lo que puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

La submatriz **Q** representa las probabilidades de transición de estados no absorbentes a estados no absorbentes, mientras que la submatriz **R** contiene las probabilidades de transición de estados no absorbentes a estados absorbentes.

Cadenas de Markov absorbentes

Teorema

La siguiente matriz

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\,\mathbf{R}$$

contiene las probabilidades b_{ij} de que la cadena sea absorbida en el estado s_j si se encuentra en el estado s_i.

Demostración: Primero veamos que esa inversa existe.Consideremos el sistema $\mathbf{x}\,(\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}\,\mathbf{Q} = \mathbf{x}$.Iterando n veces: $\mathbf{x}\,\mathbf{Q}^n = \mathbf{x}$.Como los elementos de $\mathbf{Q}$ son menores a 1, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}^n = \mathbf{0}$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}\,\mathbf{Q}^n = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ existe.
Las probabilidades de pasar de un estado no absorbente a uno absorbente están dadas por $\mathbf{R}$.Las probabilidades de pasar de un estado no absorbente a uno no absorbente, y luego a uno absorbente están dadas por $\mathbf{Q}\,\mathbf{R}$.Las probabilidades de permanecer en estados no absorbentes durante dos períodos y luego pasar a uno absorbente está dada por $\mathbf{Q}^2\,\mathbf{R}$.Las probabilidades de permanecer tres períodos en estados no absorbentes y luego terminar en uno absorbente están dadas por $\mathbf{Q}^3\,\mathbf{R}$. Y así sucesivamente...
Entonces la matriz de probabilidades de transicionar de un estado no absorbente a uno absorbente en el largo plazo es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbf{Q}^i\,\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\,\mathbf{R} \quad \square$$

Cadenas de Markov absorbentes

Ejemplo 4 (cont.):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si se está en el estado 1 entonces hay una probabilidad de $3/4$ de terminar en el estado 0 (casa), y una probabilidad de $1/4$ de terminar en el estado 4 (bar).

Bibliografía

Bernardello, A., Bianco, M. J., Casparri, M. T., García Fronti, J. & Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática para Economistas con Excel y Matlab* [Cap. 1.4]. Omicron System.

Grinstead, C. & Snell, J. (2012). *Introduction to Probability* [Cap. 11]. American Mathematical Society.

Formas cuadráticas libres

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Formas cuadráticas libres

Definición

Una forma cuadrática es una expresión polinómica homogénea de grado dos. Es decir, una expresión del tipo

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = \mathbf{x}^T\, \mathbf{A}\, \mathbf{x}$$

Por ejemplo,

- $3x + 4x^2y^3 - 2yz$ es una expresión polinómica pero no es homogenea ya que cada término tiene distinto grado. Por lo tanto, no es una forma cuadrática.
- $4x - 9y + z$ es una expresión polinómica homogénea de grado uno. Por lo tanto, no es una forma cuadrática.
- $4x^2 - xy + 3y^2$ es una forma cuadrática.
- $x^2 + 2xy - yw - 7w^2$ es una forma cuadrática.

Una forma cuadrática tiene una expresión matricial del tipo $\mathbf{x}^T\, \mathbf{A}\, \mathbf{x}$. Tomando el último ejemplo:

$$x^2 + 2xy - yw - 7w^2 = \begin{bmatrix} x & y & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Formas cuadráticas libres

La matriz asociada a la forma cuadrática siempre puede hacerse simétrica. Esto no quiere decir que siempre lo sea:

$$x^2 + 2xy - yw - 7w^2 = \begin{bmatrix} x & y & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Para hacerla simétrica se asigna como elementos (i, j) y (j, i) de la matriz el coeficiente a_{ij} dividido por 2. Si $i = j$ entonces en la matriz se escribe el coeficiente a_{ii} sin dividir por 2.

Signo de la forma

Dependiendo de los valores que tome la forma $F(\mathbf{x})$ se define su signo:

- Definida positiva sii $F(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Por ejemplo, $F = 3x^2 + 5y^2$
- Definida negativa sii $F(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Por ejemplo, $F = -x^2 - 4y^2$
- Semidefinida positiva sii $F(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Por ejemplo, $F = 4x^2 + y^2 - 4xy + 3z^2 = (2x - y)^2 + 3z^2$ que no toma valores negativos y se anula para el vector $(1, 2, 0)$.
- Semidefinida negativa sii $F(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Por ejemplo, $F = -5x^2 - y^2 + 6yz - 9z^2 = -5x^2 - (y - 3z)^2$ que no toma valores positivos y se anula para el vector $(0, 3, 1)$.
- Indefinida sii $F(\mathbf{x}) > 0$ para algún $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $F(\mathbf{x}) < 0$ para algún $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Por ejemplo, $F = 3x^2 - y^2$.

La matriz simétrica $\mathbf{A}$ asociada a la forma cuadrática F tiene el mismo signo que F.

Signo de la forma

Sea $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ una forma cuadrática, y sea $\mathbf{Q}$ una matriz ortogonal conformada por los vectores propios de $\mathbf{A}$ dispuestos en columnas. Efectuando el cambio de variables $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\,\mathbf{y}$:

$$F = (\mathbf{Q}\,\mathbf{y})^T \mathbf{A}\,(\mathbf{Q}\,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \Lambda\,\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i^2$$

donde los coeficientes λ_i son los valores propios de $\mathbf{A}$.
Escrita la forma cuadrática de esta manera se observa que si todos los valores propios de $\mathbf{A}$ son positivos, entonces el único vector $\mathbf{y}$ para el cual se anula F es $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, por lo tanto la forma es definida positiva.
De forma similar, si todos los valores propios de $\mathbf{A}$ son negativos: $F < 0$. Si algún valor propio es nulo y los que no se anulan son positivos: $F \geq 0$. Si algún valor propio es nulo y los demás son negativos: $F \leq 0$. Finalmente, si algunos valores propios son positivos y otros negativos: F es indefinida.

Signo de la forma

Una forma alternativa de determinar el signo de una forma es evaluando los menores principales de la matriz **A** (Criterio de Sylvester).

Teorema

Una forma cuadrática $F = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ es definida positiva sii todos los menores principales dominantes de **A** son positivos, es decir,

$$|\mathbf{A}_i| > 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Demostración: $\Leftarrow$) Primero demostramos la necesariedad, es decir, que si es definida positiva entonces todos los menores principales dominantes son positivos.
Si F es definida positiva entonces todos sus valores propios son positivos. Como $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ entonces $|A| > 0$.
Además, si elegimos $\mathbf{x}$ en el subespacio vectorial $S_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_i, 0, \cdots, 0\}$ tenemos que $F(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in S_i$. Pero $F(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in S_i$ es la forma cuadrática asociada a la matriz $\mathbf{A}_i$. Entonces $|\mathbf{A}_i| > 0$, y esto es válido para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Signo de la forma

$\Rightarrow$) Ahora demostremos la suficiencia, esto es, que si todos los menores principales dominantes son positivos entonces la forma cuadrática es definida positiva.
Procedemos con inducción matemática completa.
Para $n = 1$ es trivial ya que si $|\mathbf{A}_1| = a_{11} > 0$, entonces $F_1 = a_{11}\, x_1^2$.
Ahora supongamos que se cumple para $n = k - 1$. Si $|\mathbf{A}_k|$ fuese mayor a cero, entonces A_k no tendría valores propios nulos, y si tuviera raíces negativas tendrían que ser por lo menos dos: λ_i y λ_j. Si $\mathbf{v}^i$ es tal que $\mathbf{A}_k\, \mathbf{v}^i = \lambda_i\, \mathbf{v}^i$, entonces $\left(\mathbf{v}^i\right)^T\, \mathbf{A}_k\, \mathbf{v}^i = \lambda_i \left\langle \mathbf{v}^i, \mathbf{v}^i \right\rangle < 0$, con lo cual en el subespacio de dimensión dos generado por los vectores propios $\mathbf{v}^i$ y $\mathbf{v}^j$ asociados a λ_i y λ_j se da que $F_k < 0$.
Por otra parte, en el subespacio $V_{k-1} = \{\mathbf{x} \in V_k | x_k = 0\}$, cuya dimensión es $k - 1$, la forma cuadrática $F(\mathbf{x})$ es definida positiva por la hipótesis de inducción. Como la intersección entre V_{k-1} y el subespacio generado por $\mathbf{v}^i$ y $\mathbf{v}^j$ es no vacía, entonces se llega a una contradicción, ya que para algún vector de esa intersección la forma es definida positiva y negativa al mismo tiempo. Esta contradicción es producto de haber supuesto que A_k tenía valores propios negativos. Por lo tanto, todas las raíces de A_k son positivas y $F_k(\mathbf{x})$ es definida positiva $\square$

Signo de la forma

Ejemplo 1:

$$F(\mathbf{x}) = 3x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2yz + 4xz + 2xy$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_1| = 3 > 0 \quad |\mathbf{A}_2| = 11 > 0 \quad |\mathbf{A}| = 51 > 0$$

F es definida positiva

Signo de la forma

Teorema

La forma cuadrática $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ es definida negativa sii la matriz $\mathbf{A}$ verifica $(-1)^i |A_i| > 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Demostración: Inmediata a partir de que $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ es definida negativa sii $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (-\mathbf{A})\,\mathbf{x}$ es definida positiva, y que por propiedad de determinantes se verifica $|-A_i| = (-1)^i |A_i|$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ □

Ejemplo 2:

$$F(\mathbf{x}) = -6x^2 - 12xy - 18y^2 + 4xz - 2z^2 + 6zw - 10w^2$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 2 & 0 \\ -6 & -18 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_1| = -6 < 0 \quad |\mathbf{A}_2| = 72 > 0 \quad |\mathbf{A}_3| = -72 < 0 \quad |\mathbf{A}_4| = 72 > 0$$

F es definida negativa

Signo de la forma

Teorema

Si la forma cuadrática $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x}$ es semidefinida entonces $|\mathbf{A}| = 0$.

Nótese que este último teorema da una condición necesaria para que la forma sea semidefinida.

Teorema

Si la matriz simétrica $\mathbf{A}$ verifica que $|\mathbf{A}_i| > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y $|\mathbf{A}| = 0$, entonces $F(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva.

Teorema

Si la matriz simétrica $\mathbf{A}$ verifica que $(-1)^i|\mathbf{A}_i| > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y $|\mathbf{A}| = 0$, entonces $F(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa.

Estos dos teoremas nos dan condiciones suficientes para que una forma sea semidefinida positiva o negativa.

Signo de la forma

Ejemplo 3:

$$F(x,y,z) = 5x^2 - 20xy + 25y^2 - 4xz + 4z^2$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -10 & -2 \\ -10 & 25 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_1| = 5 > 0 \quad |\mathbf{A}_2| = 25 > 0 \quad |\mathbf{A}| = 0$$

F es semidefinida positiva.

Ejemplo 4:

$$F(x,y,z,w) = -x^2 + 4xy - 6y^2 - 6xz + 8yz - 8yw - 10zw - 12z^2 - 9w^2$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & -4 \\ -3 & 4 & -12 & -5 \\ 0 & -4 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_1| = -1 < 0 \quad |\mathbf{A}_2| = 2 > 0 \quad |\mathbf{A}_3| = -2 < 0 \quad |\mathbf{A}| = 0$$

F es semidefinida negativa.

Signo de la forma

El siguiente teorema da una condición necesaria y suficiente para determinar si una forma es semidefinida positiva o negativa.

Teorema

Sea $|\tilde{\mathbf{A}}_k|$ el determinante de orden k que puede obtenerse permutando filas y sus correspondientes columnas de cada uno de los menores principales de orden k de $\mathbf{A}$. La forma cuadrática es:

- semidefinida positiva sii $|\tilde{\mathbf{A}}_k| \geq 0$ para todo $k = 1, \cdots, n-1$ y $|\mathbf{A}| = 0$.
- semidefinida negativa sii $(-1)^k |\tilde{\mathbf{A}}_k| \geq 0$ para todo $k = 1, \cdots, n-1$ y $|\mathbf{A}| = 0$.

Por ejemplo para una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de 3×3 tenemos los siguientes $|\tilde{\mathbf{A}}_k|$:

$$|\tilde{\mathbf{A}}_1^1| = a_{11} \quad |\tilde{\mathbf{A}}_1^2| = a_{22} \quad |\tilde{\mathbf{A}}_1^3| = a_{33}$$

$$|\tilde{\mathbf{A}}_2^1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad |\tilde{\mathbf{A}}_2^2| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \quad |\tilde{\mathbf{A}}_2^3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|\tilde{\mathbf{A}}_2^4| = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \quad |\tilde{\mathbf{A}}_2^5| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |\tilde{\mathbf{A}}_2^6| = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|\tilde{\mathbf{A}}_3| = |\mathbf{A}|$$

Signo de la forma

Observación

$$|\tilde{\mathbf{A}}_2^1| = |\tilde{\mathbf{A}}_2^2|$$
$$|\tilde{\mathbf{A}}_2^3| = |\tilde{\mathbf{A}}_2^4|$$
$$|\tilde{\mathbf{A}}_2^5| = |\tilde{\mathbf{A}}_2^6|$$

porque se intercambian filas y columnas simultáneamente.

Bibliografía

Bernardello, A., Bianco, M. J., Casparri, M. T., García Fronti, J. & Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática para Economistas con Excel y Matlab* [Cap. 1.3]. Omicron System.

Optimización libre

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Condición de primer orden

Comencemos por el problema de maximizar una función de una variable $\max_x f(x)$

Un máximo local de esta función verifica que

$$f(x^*) \geq f(x^* + \Delta x) \tag{1}$$

Si $f(\cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable, podemos realizar una expansión de Taylor en torno a $\Delta x = 0$

$$f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^*)\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x^* + \theta\Delta x)(\Delta x)^2 \tag{2}$$

con $\theta \in (0, 1)$.
Reemplazando (2) en (1) y cancelando

$$0 \geq \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^*)\Delta x + +\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x^* + \theta\Delta x)(\Delta x)^2$$

Esta desigualdad tiene que valer para todo Δx. Pero como Δx puede ser positivo o negativo, entonces $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^*) = 0$. Esta es una condición necesaria de primer orden.
En segundo orden, como h^2 y $(\Delta x)^2$ son positivos, entonces como condición necesaria tenemos que $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x^*) \leq 0$
Si queremos asegurar que sea un máximo local, es decir, buscamos una condición suficiente, tenemos que exigir que $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x^*) < 0$

Condición de primer orden

Vamos a extender este razonamiento al caso de n variables. Acá el la derivada primera va a ser un vector gradiente; y la derivada segunda, la matriz hessiana. La demostración formal está en Intriligator (2002) págs. 24-26.

Proposición

Sea $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una función al menos dos veces continuamente diferenciable de n variables. Si en el punto $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ la función presenta un extremo local entonces su diferencial primero se anula en $\mathbf{x}^*$, es decir,

$$df(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*)\, dx_i = 0$$

Como el diferencial primero se anula cualesquiera sean los valores de los dx_i, no todos nulos. La única forma de garantizarlo es que todas las derivadas parciales $\partial f / \partial x_i$ sean nulas en ese punto.

Esta proposición da una condición necesaria de primer orden para la existencia de un extremo local.
Es una condición necesaria porque todo extremo local la cumple, pero hay puntos que cumplen la condición pero no son extremos locales. Por ejemplo, los llamados puntos de silla.

Condiciones de segundo orden

Condiciones necesarias de segundo orden

Si f presenta un mínimo local en $\mathbf{x}^*$ entonces $d^2 f(\mathbf{x}^*) \geq 0$.
Si f presenta un máximo local en $\mathbf{x}^*$ entonces $d^2 f(\mathbf{x}^*) \leq 0$.

Condiciones suficientes de segundo orden

Si $d^2 f(\mathbf{x}^*) > 0$ entonces f presenta un mínimo local en $\mathbf{x}^*$.
Si $d^2 f(\mathbf{x}^*) < 0$ entonces f presenta un máximo local en $\mathbf{x}^*$.
Si $d^2 f(\mathbf{x}^*)$ es indefinido entonces f presenta un punto de silla en $\mathbf{x}^*$.

El diferencial segundo

El diferencial segundo de f evaluado en $\mathbf{x}^*$ es una forma cuadrática en las variables dx_i para $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$d^2 f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^*)\, dx_i\, dx_j$$

cuya matriz asociada es la matriz hessiana:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

que es simétrica si se cumplen los supuestos del Teorema de Schwarz (o Clairaut o Young) que permiten intercambiar el orden en que se toman las derivadas sin alterar el resultado.
Para verificar las condiciones de segundo orden se debe estudiar el signo de la matriz hessiana.

Optimización libre

Ejemplo 1:

$$f(x, y, z) = -x^3 - y^2 + 3xz + 2y - 3z^2$$

Las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\begin{aligned} \partial f/\partial x &= -3x^2 + 3z = 0 \Rightarrow z = x^2 \\ \partial f/\partial y &= -2y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \\ \partial f/\partial z &= 3x - 6z = 0 \Rightarrow x = 2z \end{aligned}$$

De la primer y tercer CPO:

$$x^2 = x \Rightarrow x\,(x - 1/2) = 0$$

Entonces los puntos críticos candidatos a extremo local son:

$$(0, 1, 0) \text{ y } (1/2, 1, 1/4)$$

Para las condiciones suficientes de segundo orden se construye el hessiano con las derivadas segundas:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -6x & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Y se evalúa el hessiano en los puntos críticos

$$\mathbf{H}_{(0,1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{H}_1| = 0 \quad |\mathbf{H}_2| = 0 \quad |\mathbf{H}_3| = 18$$

El signo de la matriz hessiana es indefinido. Por lo tanto, el punto $(0, 1, 0)$ es un punto de silla.

$$\mathbf{H}_{(1/2,1,1/4)} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{H}_1| = -3 \quad |\mathbf{H}_2| = 6 \quad |\mathbf{H}_3| = -18$$

La matriz hessiana es definida negativa. Por lo tanto, el punto $(1/2, 1, 1/4)$ es un máximo local.

Concavidad

Lo visto hasta acá se refiere a la determinación de extremos locales libres. Para determinar los extremos globales libres se debe asegurar que la función f cumpla cierta propiedad de "curvatura" sobre todo su dominio.

Definición

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real y D un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$. Decimos que f es cóncava en D sii para todo $\lambda \in [0, 1]$ y para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$$

Definición

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real y D un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$. Decimos que f es convexa en D sii para todo $\lambda \in [0, 1]$ y para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$$

Si la desigualdad se cumple estrictamente entonces decimos que la función es estrictamente cóncava o convexa, según el caso.

Concavidad y convexidad

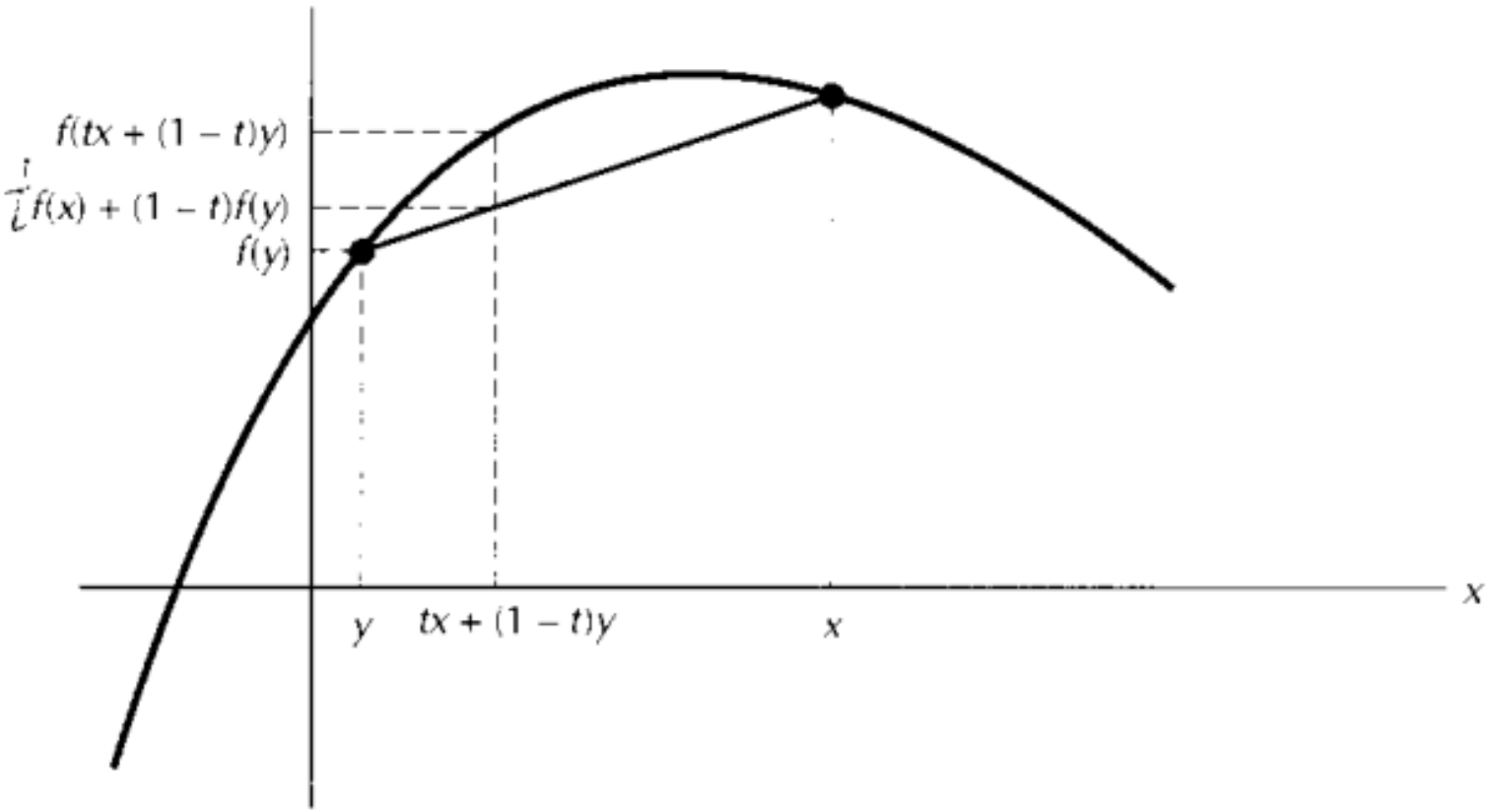
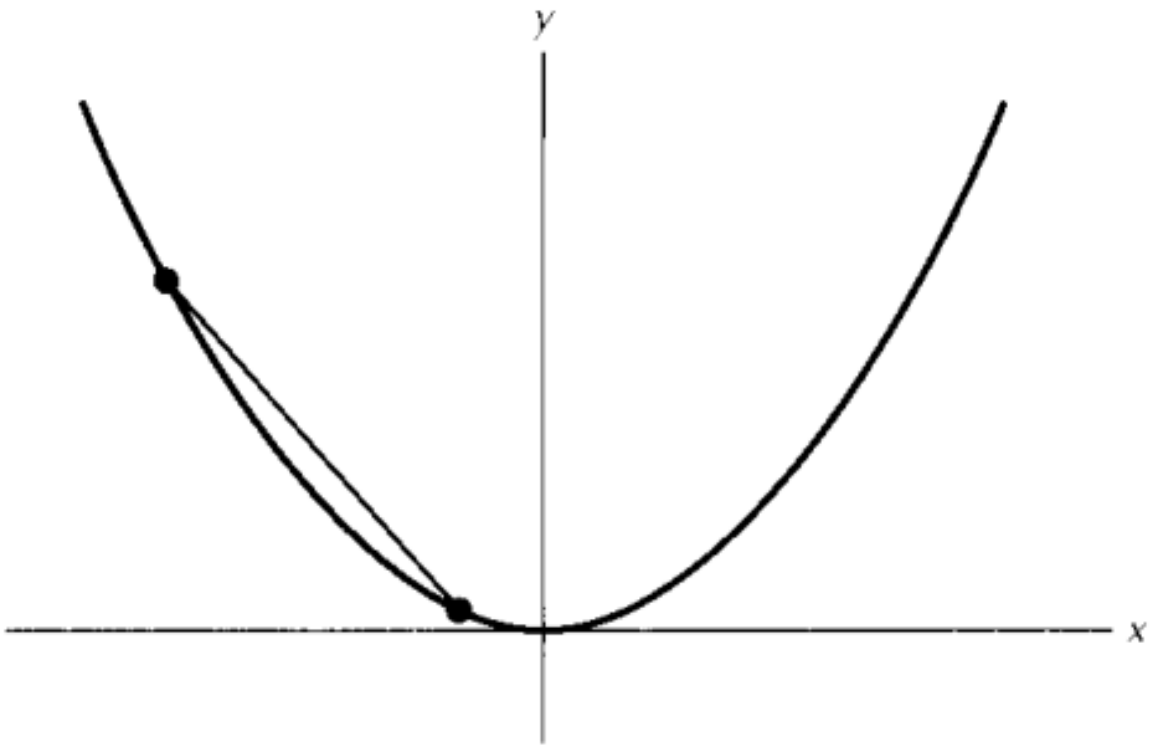


Figure 21.2

The geometric interpretation of the definition of a concave function.

Fuente: Simon y Blume (1994) pág. 507.

Concavidad y convexidad



The graph of the convex function $y = x^2$.

Figure 21.3

Fuente: Simon y Blume (1994) pág. 508.

Concavidad y convexidad

Observación

Las funciones convexas son entidades matemáticas completamente distintas a la de los conjuntos convexos.
Nótese que igual para definir una función convexa se requiere que el conjunto del dominio sea un conjunto convexo (sino no se podría evaluar la función en la línea que une los dos puntos).

Proposición

La opuesta de una función cóncava (convexa) es una función convexa (cóncava).

Proposición

La suma de dos funciones cóncavas (convexas) es una función cóncava (convexa).

Proposición

Las funciones lineales (afines) son las únicas funciones cóncavas y convexas a la vez.

Concavidad y convexidad

Ejemplo 2:

$$f(\cdot) = (x + y)^2$$

Sean $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ dos puntos cualquiera del dominio.

$$\begin{aligned} f\left[\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\right] &= \left[\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2 + \lambda\, y_1 + (1-\lambda)\, y_2\right]^2 \\ &= \left[\lambda\,(x_1 + y_1) + (1-\lambda)\,(x_2 + y_2)\right]^2 \\ &= \lambda^2\,(x_1 + y_1)^2 + (1-\lambda)^2\,(x_2 + y_2)^2 + 2\,\lambda\,(1-\lambda)\,(x_1 + y_1)\,(x_2 + y_2) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\lambda\, f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\,\mathbf{y} = \lambda\,(x_1 + y_1)^2 + (1-\lambda)\,(x_2 + y_2)^2$$

Entonces:

$$f(\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y}) \;?\; \lambda\, f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\, f(\mathbf{y})$$

$$\lambda^2(x_1+y_1)^2+(1-\lambda)^2(x_2+y_2)^2+2\lambda(1-\lambda)(x_1+y_1)\,(x_2+y_2) \;?\; \lambda(x_1+y_1)^2+(1-\lambda)(x_2+y_2)^2$$

$$\lambda(\lambda-1)(x_1+y_1)^2 + \lambda(\lambda-1)(x_2+y_2)^2 - 2\,\lambda\,(\lambda-1)\,(x_1+y_1)\,(x_2+y_2) \;?\; 0$$

$$\lambda\,(\lambda-1)\,[(x_1+y_1)-(x_2+y_2)]^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow f(\cdot) \text{ es convexa}$$

Concavidad y convexidad

Existe otra relación entre los conjuntos convexos y las funciones convexas o cóncavas.

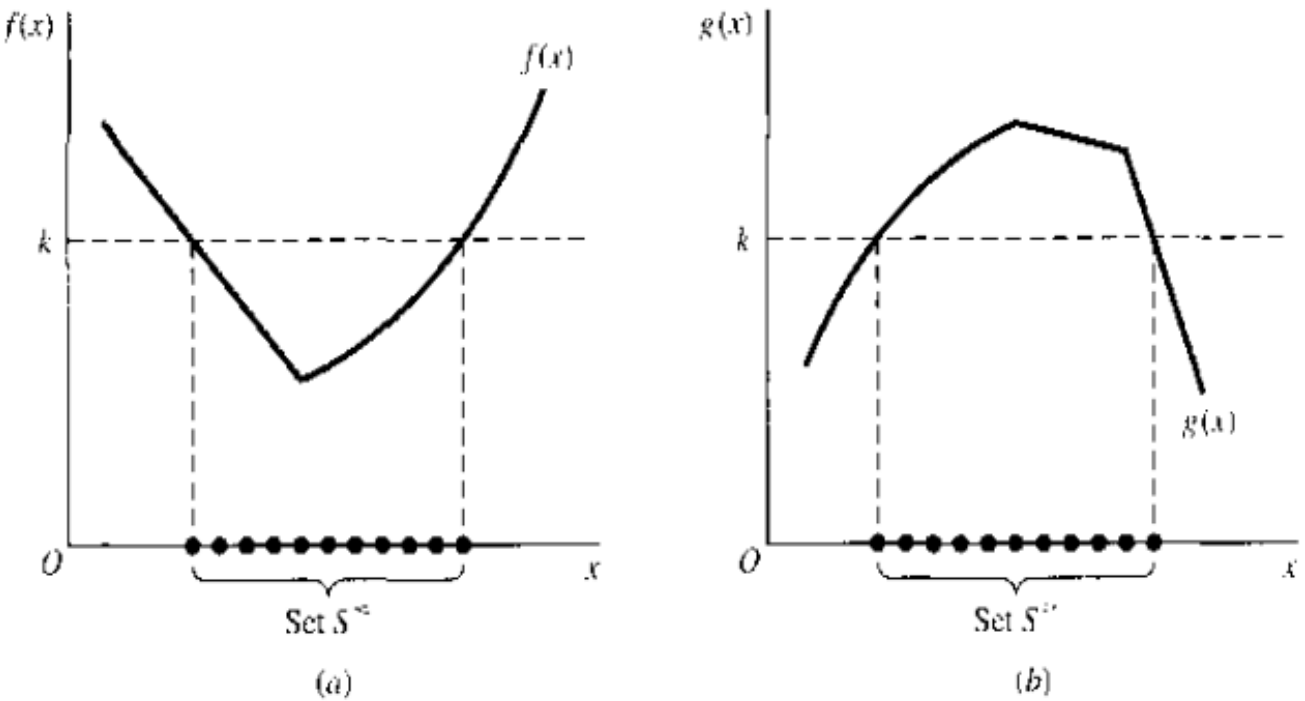
Teorema

Si f es convexa entonces $S^{\leq} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq k\}$ es un conjunto convexo para todo $k \in \mathbb{R}$.

Teorema

Si f es cóncava entonces $S^{\geq} = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \geq k\}$ es un conjunto convexo para todo $k \in \mathbb{R}$.

FIGURE 11.10



Fuente: Chiang y Wainwright (2005) pág. 330.

Concavidad y convexidad

Observación

Nótese que estas propiedades son condiciones necesarias de las funciones convexas o cóncavas. Es decir, toda función convexa o cóncava produce esos conjuntos convexos en el dominio. Sin embargo, una función que produzca esos conjuntos convexos en el dominio no siempre es convexa o cóncava.

Dado que no son condición necesaria y suficiente, no constituyen una definición alternativa, sino una caracterización.

Concavidad y convexidad de funciones diferenciables

Lo visto hasta ahora es válido para funciones no diferenciables. Cuando f es al menos dos veces continuamente diferenciable se puede usar el siguiente resultado:

Teorema

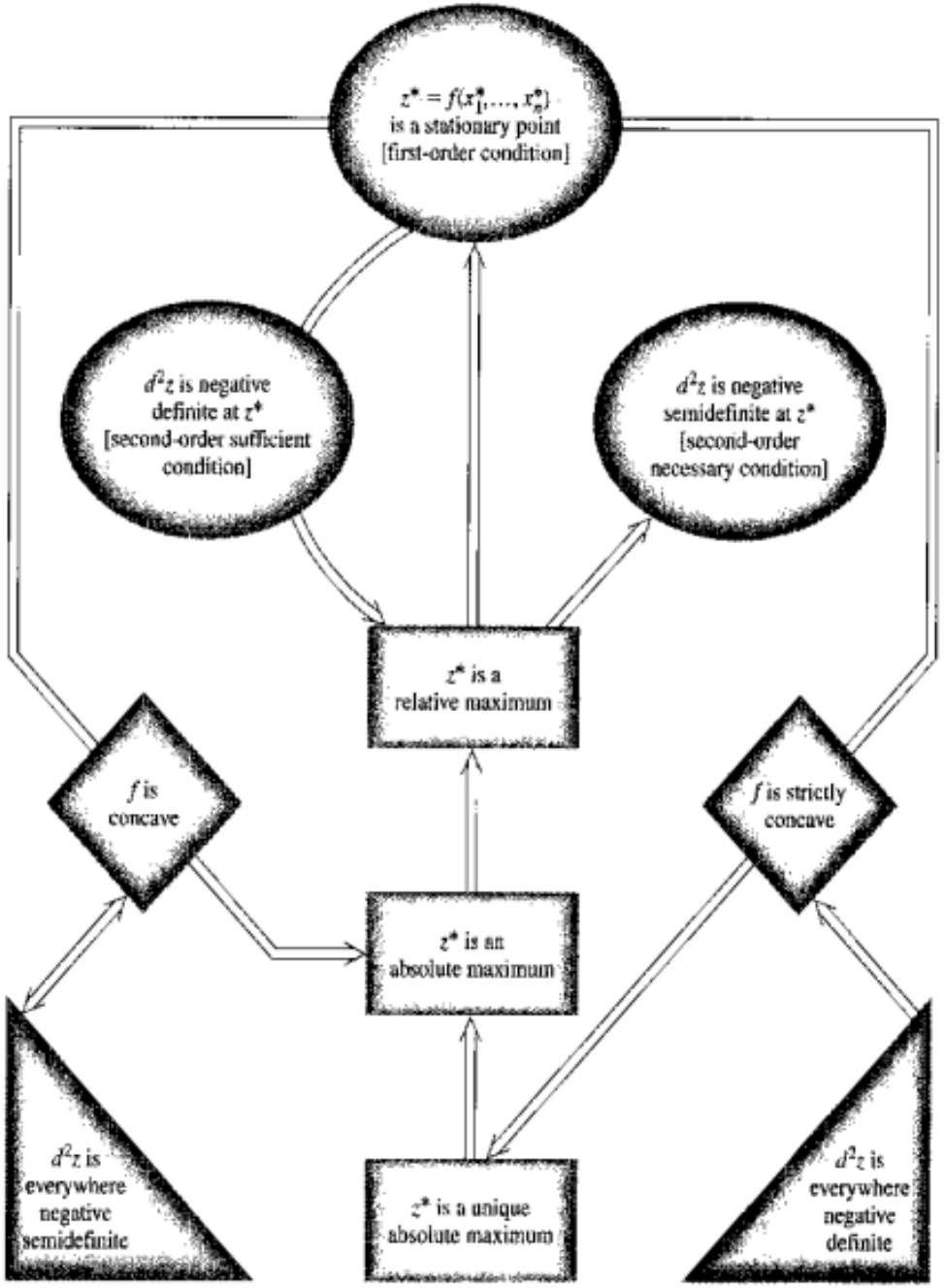
Una función $f \in C^2$ es cóncava (convexa) sii $d^2 f$ es semidefinida negativa (positiva) en todo su dominio.
La función $f \in C^2$ es estrictamente cóncava (convexa) si $d^2 f$ es definida negativa (positiva) en todo su dominio.

Teorema de suficiencia global

Si $\mathbf{x}^*$ es un punto estacionario de $f(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{x})$ es (estrictamente) cóncava, entonces $\mathbf{x}^*$ es un máximo global (único).

Este teorema es válido para problemas de mínimo cuando $f(\cdot)$ es (estrictamente) convexa.

FIGURE 11.5


$z^* = f(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ is a stationary point [first-order condition]
d^2z is negative definite at z^* [second-order sufficient condition]
d^2z is negative semidefinite at z^* [second-order necessary condition]
z^* is a relative maximum
f is concave
f is strictly concave
z^* is an absolute maximum
d^2z is everywhere negative semidefinite
z^* is a unique absolute maximum
d^2z is everywhere negative definite

Fuente: Chiang y Wainwright (2005) pág. 319.

Concavidad y convexidad de funciones diferenciables

Ejemplo 2 (cont.):

$$f(\cdot) = (x + y)^2$$

Las derivadas parciales segundas son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

El hessiano es

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{H}_1| = 2, \quad |\mathbf{H}_2| = |\mathbf{H}| = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} \text{ es semidefinida positiva} \iff f \text{ es convexa}$$

Teorema de la envolvente

Consideremos el problema de optimización libre

$$\max_{x,y} f(x, y, \alpha)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$f'_x = f'_y = 0$$

Si se cumplen las condiciones de segundo orden entonces estas dos ecuaciones definen implícitamente los valores óptimos

$$x^* = x^*(\alpha) \qquad y^* = y^*(\alpha)$$

que reemplazados en la función objetivo nos dan la función objetivo indirecta o de valor máximo

$$f^*(\alpha) = f(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha)$$

que es una función exclusivamente de α.

Teorema de la envolvente

¿Cómo afecta un cambio de α a la función objetivo indirecta? Sabemos que α impacta en f^* en forma directa pero también en forma indirecta a través de x^* y y^*. El teorema de la envolvente nos dice que estos efectos indirectos son nulos y que solo importa el efecto directo.

Teorema de la envolvente

$$\frac{d}{d\alpha} f(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha)$$

Demostración: El diferencial de f^* es:

$$\frac{df^*}{d\alpha} = f'_x \frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + f'_y \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + f'_\alpha$$

Pero por las condiciones de primer orden, éste se reduce a

$$\frac{df^*}{d\alpha} = f'_\alpha \quad \square$$

Teorema de la envolvente

Ejemplo 3: Supongamos una firma que maximiza su beneficio. Los insumos que usa son capital K y trabajo L, y la función de producción es $f(K, L)$, que tiene rendimientos marginales decrecientes.
La función de beneficio es

$$\pi = P\, f(K, L) - w\, L - r\, K$$

donde P es el precio del producto que vende, w es el salario y r la tasa de interés.
Las condiciones de primer orden de la maximización son:

$$\pi_L = P\, f_L(K, L) - w = 0$$
$$\pi_L = P\, f_K(K, L) - r = 0$$

Las condiciones de segundo orden se cumplen porque la función de beneficio es cóncava por el supuesto de rendimientos marginales decrecientes.
Las CPO definen implícitamente las ecuaciones de demanda de los factores de producción:

$$L^* = L^*(w, r, P)$$
$$K^* = K^*(w, r, P)$$

que si se sustituyen en la función de beneficio se obtiene la función de beneficio indirecta

$$\pi^*(w, r, P) = P\, f(K^*, L^*) - w\, L^* - r\, K^*$$

Teorema de la envolvente

La función de beneficio indirecta es la envolvente de todas las funciones de beneficio para esos valores de los parámetro.
¿Cómo cambian los beneficios indirectos de la empresa ante un cambio infinitesimal en los salarios? Por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = -L^*$$

Bibliografía

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* [Cap. 11]. McGraw-Hill Education.

Intriligator, M. (2002). *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Society for Industrial; Applied Mathematics.

Simon, C. & Blume, L. (1994). *Mathematics for Economists* [Cap. 21]. Norton.

Formas cuadráticas restringidas

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Formas cuadráticas restringidas

Definición

Una forma cuadrática restringida es una forma cuadrática limitada a un subespacio vectorial del dominio. Esto es:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = \mathbf{x}^T\, \mathbf{A}\, \mathbf{x} \text{ sujeto a } \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i = 0$$

La restricción lineal igualada a cero define el subespacio del dominio en cuestión.

Signo de la forma

Comenzando por el caso de dos variables $F(x_1, x_2) = a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{22}\, x_2^2$ sujeta a una restricción $b_1\, x_1 + b_2\, x_2 = 0$. Vamos a despejar de la restricción $x_2 = -{}^{b_1}/_{b_2} x_1$ y reemplazar en F:

$$F(x_1) = a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1 \left(-\frac{b_1}{b_2} x_1\right) + a_{22} \left(-\frac{b_1}{b_2} x_1\right)^2 = a_{11}\, x_1^2 - 2\, a_{12}\, \frac{b_1}{b_2}\, x_1^2 + a_{22}\, \frac{b_1^2}{b_2^2} x_1^2$$

$$= \frac{x_1^2}{b_2^2} \left(a_{11}\, b_2^2 - 2 a_{12}\, b_1\, b_2 + a_{22}\, b_1^2\right)$$

$$= \frac{x_1^2}{b_2^2} (-1) \left| \begin{array}{c|cc} 0 & b_1 & b_2 \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} \end{array} \right| = -\frac{x_1^2}{b_2^2}\, |\bar{\mathbf{A}}|$$

La matriz $\bar{\mathbf{A}}$ es la matriz $\mathbf{A}$ bordeada (u orleada) por los coeficientes de la restricción lineal. Entonces F será

- definida positiva sii $|\bar{\mathbf{A}}|$ es negativa,
- definida negativa sii $|\bar{\mathbf{A}}|$ es positiva.

Signo de la forma

Para el caso de n variables con una única restricción lineal, el signo de la forma cuadrática dependerá de la siguiente matriz:

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

La forma cuadrática restringida será

- definida positiva sii $|\bar{\mathbf{A}}_i|$ es negativa para todo $i = 2, 3, \cdots, n$;
- definida negativa sii $|\bar{\mathbf{A}}_i|$ alterna de signo comenzando por positivo en $i = 2$;
- semidefinida positiva sii $|\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_i| \leq 0$ para todo $i = 2, 3, \cdots, n$;
- semidefinida negativa sii $(-1)^i |\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_i| \geq 0$ para todo $i = 2, 3, \cdots, n$.

El menor principal dominante $|\bar{\mathbf{A}}_i|$ contiene hasta el elemento a_{ii} en la diagonal principal.

Signo de la forma

Para el caso más general de n variables con m restricciones lineales

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = \mathbf{x}^T\, \mathbf{A}\, \mathbf{x} \text{ sujeto a } \mathbf{B}\, \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{B}$ tiene dimensión $m \times n$ con $m < n$.
La matriz $\bar{\mathbf{A}}$ será

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{B}_{m\times n} \\ \mathbf{B}^T_{n\times m} & \mathbf{A}_{n\times n} \end{bmatrix}$$

La regla de signos para la determinación de la forma restringida es la siguiente:

- definida positiva sii $(-1)^m\, |\bar{\mathbf{A}}_i| > 0$ para todo $i = m+1, m+2, \cdots, n$.
- definida negativa sii $(-1)^i\, |\bar{\mathbf{A}}_i| > 0$ para todo $i = m+1, m+2, \cdots, n$.
- si es semidefinida positiva entonces $(-1)^m\, |\bar{\mathbf{A}}_i| \geq 0$ para todo $i = m+1, m+2, \cdots, n$ y $|\bar{\mathbf{A}}_n| = 0$.
- si es semidefinida negativa entonces $(-1)^i\, |\bar{\mathbf{A}}_i| \geq 0$ para todo $i = m+1, m+2, \cdots, n-1$ y $|\bar{\mathbf{A}}_n| = 0$.
- semidefinida positiva sii $(-1)^m\, |\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_i| \geq 0$ para todo $i = m+1, m+2, \cdots, n$.
- semidefinida negativa sii $(-1)^i\, |\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_i| \geq 0$ para todo $i = m+1, m+2, \cdots, n$.

Formas cuadráticas restringidas

Observación

Este caso general engloba al de formas cuadráticas libres ($m = 0$) y al de una restricción ($m = 1$).

Ejemplo 1:

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 6xy - 2yz - 4xz \text{ sujeto a } x + 2y + 3z = 0$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$|\bar{\mathbf{A}}_2| = -24 < 0 \quad |\bar{\mathbf{A}}_3| = |\bar{\mathbf{A}}| = -168 < 0$$

$$\Rightarrow \text{ Definida positiva}$$

Formas cuadráticas restringidas

Ejemplo 2:

$$F(x,y,z,w) = 4x^2 - 2xy + 2xw + y^2 + 4yz + 3z^2 + 2zw + w^2 \text{ sujeto a } \begin{cases} x - y + 2w = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$|\bar{\mathbf{A}}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 23 > 0, \quad |\bar{\mathbf{A}}_4| = |\bar{\mathbf{A}}| = 218 > 0$$

$\Rightarrow$ Definida positiva

Bibliografía

Bernardello, A., Bianco, M. J., Casparri, M. T., García Fronti, J. & Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática para Economistas con Excel y Matlab* [Cap. 1.3]. Omicron System.

Optimización clásica restringida

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

La función de Lagrange

Sea $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una función al menos dos veces continuamente diferenciable de n variables sujeto a m restricciones de igualdad $g^j(x_1, \cdots, x_n) = c_j$ para $j = 1, \cdots, m < n$.
Para encontrar los extremos locales restringidos se puede despejar de las restricciones y reemplazar en la función objetivo $f(\cdot)$ y luego resolver el problema como uno de optimización libre.
Otro método más práctico consiste en construir la función de Lagrange del problema:

$$\mathcal{L}(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c^j - g^j(x_1, \cdots, x_n) \right]$$

y buscar los extremos libres de esta función.
Demostración: Intriligator (2002) págs. 31-33.

La función de Lagrange

Las condiciones necesarias[1] de primer orden son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = f'_{x_1}(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, g^j_{x_1}(\cdot) = 0$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = f'_{x_n}(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, g^j_{x_n}(\cdot) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = c^1 - g^1(\cdot) = 0$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = c^m - g^m(\cdot) = 0$$

de las cuales se obtienen los puntos críticos o estacionarios.
En el caso más simple de dos variables y una restricción, se comprueba que en el óptimo la pendiente de la curva de nivel es igual a la pendiente de la restricción.
En el caso más general, en el óptimo, el gradiente de la función objetivo se puede expresar como una combinación lineal del jacobiano de las restricciones.

[1] Para que sean necesarias se tiene que cumplir la calificación de restricciones (más adelante lo veremos).

La función de Lagrange

Y luego se evalúan las condiciones de segundo orden con la matriz Hessiana orlada:

$$\bar{\mathbf{H}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & g^1_{x_1}(\cdot) & \cdots & g^1_{x_n}(\cdot) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & g^m_{x_1}(\cdot) & \cdots & g^m_{x_n}(\cdot) \\ \hline g^1_{x_1}(\cdot) & \cdots & g^m_{x_1}(\cdot) & \mathcal{L}_{x_1x_1} & \cdots & \mathcal{L}_{x_1x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g^1_{x_n}(\cdot) & \cdots & g^m_{x_n}(\cdot) & \mathcal{L}_{x_nx_1} & \cdots & \mathcal{L}_{x_nx_n} \end{array}\right]$$

Seguimos interesados en conocer el signo del diferencial segundo (cuya matriz asociada es el hessiano) pero solo para los desplazamientos que nos mantienen en la región factible.
Las condiciones suficientes de segundo orden son:

- Si $\bar{\mathbf{H}}$ es definida negativa en el punto estacionario entonces es un máximo local.
- Si $\bar{\mathbf{H}}$ es definida positiva en el punto estacionario entonces es un mínimo local.

Las condiciones necesarias de segundo orden son:

- Si el punto estacionario es un máximo local entonces $\bar{\mathbf{H}}$ es semidefinida negativa.
- Si el punto estacionario es un mínimo local entonces $\bar{\mathbf{H}}$ es semidefinida positiva.

Los multiplicadores de Lagrange

Las constantes λ_j son los multiplicadores de Lagrange.

Proposición

Los multiplicadores de Lagrange representan cuánto cambia el valor óptimo de f ante un cambio infinitesimal en la restricción a través del parámetro c.

Demostración: Lo demostramos para el caso de dos variables y una restricción. Sea $\mathcal{L} = f(x,y) + \lambda\,[c - g(x,y)]$ la función de Lagrange del problema y (x^*, y^*, λ^*) los valores en el óptimo, que dependerán de c. Porque las condiciones de primer orden son necesarias, en (x^*, y^*, λ^*) se verifica:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x(x^*, y^*) - \lambda^*\, g_x(x^*, y^*) = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y(x^*, y^*) - \lambda^*\, g_y(x^*, y^*) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = c - g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

Definimos $\bar{\mathcal{L}} = f(x^*, y^*) + \lambda^*\ [c - g(x^*, y^*)]$, que es la función de Lagrange reemplazando las variables por su solución óptima. Por ello, $\bar{\mathcal{L}}$ es una función de una única variable: c.

Los multiplicadores de Lagrange

Si derivamos $\bar{\mathcal{L}}$ respecto de c:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathcal{L}}}{dc} &= f_x \frac{dx^*}{dc} + f_y \frac{dy^*}{dc} + [c - g(x^*, y^*)] \frac{d\lambda^*}{dc} + \lambda^* \left(1 - g_x \frac{dx^*}{dc} - g_y \frac{dy^*}{dc}\right) \\ &= \underbrace{(f_x - \lambda^* g_x)}_{=0} \frac{dx^*}{dc} + \underbrace{(f_y - \lambda^* g_y)}_{=0} \frac{dy^*}{dc} + \underbrace{[c - g(x^*, y^*)]}_{=0} \frac{d\lambda^*}{dc} + \lambda^* \\ &= \lambda^* \quad \square\end{aligned}$$

Optimización restringida

Ejemplo 1: Encontremos los extremos locales de la función $f(\cdot) = x\,y\,z$ sujeto a $g^1 = x^2 + y^2 = 1$ y $g^2 = x + z = 1$.
La función de Lagrange es

$$\mathcal{L} = x\,y\,z + \lambda_1(1 - x^2 - y^2) + \lambda_2(1 - x - z)$$

Las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= y\,z - 2\,\lambda_1\,x - \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= x\,z - 2\,\lambda_1\,y = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= x\,y - \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} &= 1 - x^2 - y^2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} &= 1 - x - z = 0
\end{aligned}$$

Despejando λ_1 y λ_2 de la segunda y tercera ecuación, y reemplazando en la primera:

$$y\,z - 2\left(\frac{x\,z}{2\,y}\right)x - x\,y = 0$$

$$y^2\,z - x^2\,z - x\,y^2 = 0$$

Despejando y^2 de la cuarta ecuación y z de la quinta, y reemplazando:

$$(1 - x^2)(1 - x) - x^2(1 - x) - x(1 - x^2) = 0$$

Optimización restringida

$$3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

Esta ecuación cúbica tiene una raíz $x_1 = 1$.

	3	-2	-2	1
1		3	1	-1
	3	1	-1	0

Las otras dos raíces son

$$\frac{-1}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$$

Reemplazando en las restricciones se obtienen los valores de las demás variables:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0$$

$$x_{2,3} \approx 0{,}4343,\ y_{2,3} \approx \pm 0{,}9008,\ z_{2,3} \approx 0{,}5657,\ \lambda_{1_{2,3}} \approx \pm 0{,}1364,\ \lambda_{2_{2,3}} \approx \pm 0{,}3912$$

$$x_{4,5} \approx -0{,}7676\ y_{4,5} \approx \pm 0{,}6409\ z_{4,5} \approx 1{,}7676,\ \lambda_{1_{4,5}} \approx \mp 1{,}0585,\ \lambda_{2_{4,5}} \approx \pm 0{,}49195$$

que constituyen cinco puntos estacionarios.

Optimización restringida

La matriz Hessiana orlada es

$$\bar{\mathbf{H}} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & -2x & -2y & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline -2x & -1 & -2\lambda_1 & z & y \\ -2y & 0 & z & -2\lambda_1 & x \\ 0 & -1 & y & x & 0 \end{array}\right]$$

Como siempre se evalúan los últimos $(n - m)$ menores principales, solo tenemos que evaluar el signo del determinante.

$$|\bar{\mathbf{H}}|_{\mathbf{x}_1} = 0, \quad |\bar{\mathbf{H}}|_{\mathbf{x}_2} \approx -7{,}35, \quad |\bar{\mathbf{H}}|_{\mathbf{x}_3} \approx 7{,}35, \quad |\bar{\mathbf{H}}|_{\mathbf{x}_4} \approx 16{,}34, \quad |\bar{\mathbf{H}}|_{\mathbf{x}_5} \approx -16{,}34$$

Entonces:

- En el punto $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$ no podemos afirmar que exista o no un máximo o mínimo local porque se cumple la condición necesaria de segundo orden pero no la suficiente.
- En $\mathbf{x}_2 = (0{,}434, 0{,}9008, 0{,}5657)$ hay un máximo local porque la hessiana orlada es definida negativa.
- En $\mathbf{x}_3$ hay un mínimo local porque la hessiana orlada es definida positiva.
- En $\mathbf{x}_4$ hay un mínimo local.
- En $\mathbf{x}_5$ hay un máximo local.

Cuasiconcavidad

Hasta ahora tratamos máximos locales. Para estudiar máximos globales vamos a introducir las funciones cuasicóncavas, que cumplen un rol similar al que cumplían las funciones cóncavas en optimización libre.

Definición

Una función $f : D \to \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, es cuasicóncava sii, para dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in D$ y para $\lambda \in (0, 1)$ se verifica:

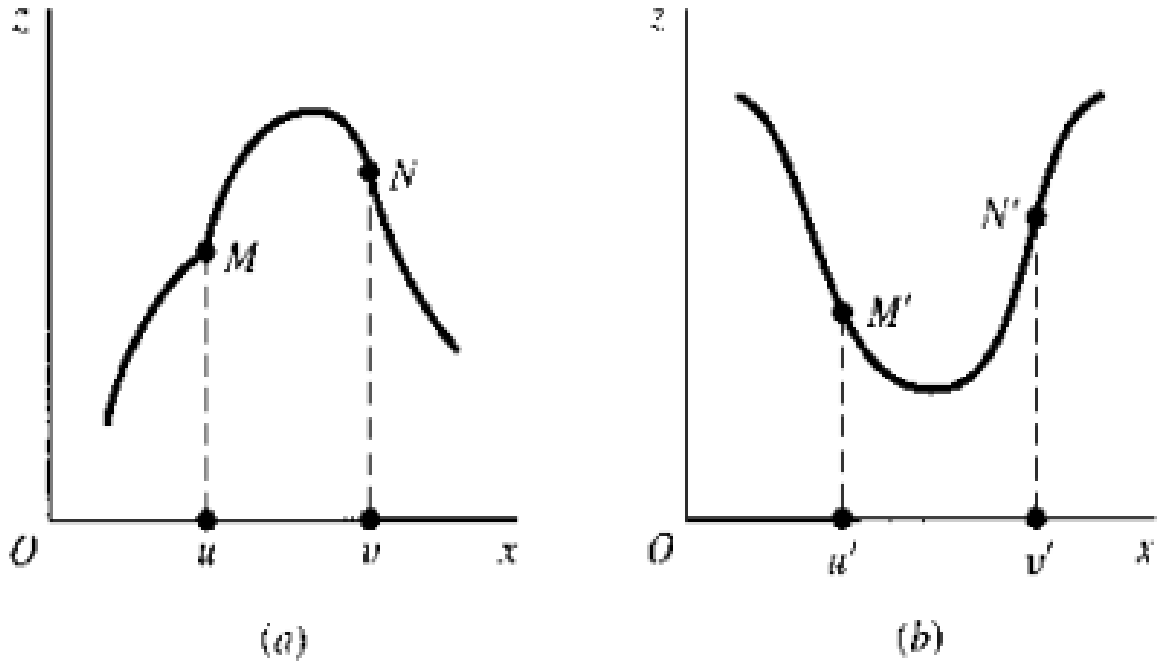
$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) \Rightarrow f[\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}] \geq f(\mathbf{y})$$

Definición

Una función $f : D \to \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, es cuasiconvexa sii, para dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in D$ y para $\lambda \in (0, 1)$ se verifica:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) \Rightarrow f[\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}] \leq f(\mathbf{x})$$

Cuasiconcavidad



Fuente: Chiang y Wainwright (2005) pág. 364.

En la figura de la izquierda v sería $\mathbf{x}$ en la definición, y u sería $\mathbf{y}$ porque $f(v) = N \geq M = f(u)$. La imagen de la combinación lineal convexa entre u y v está siempre por encima de $f(u) = M$. Por ello la función es cuasicóncava.

Por otro lado, como la imagen de la combinación lineal convexa está por encima de la imagen de $f(v) = N$ no es cuasiconvexa.

En la figura de la derecha ocurre lo opuesto ya que la función es cuasiconvexa pero no cuasicóncava.

Cuasiconcavidad

Proposición

La opuesta de una función cuasicóncava es cuasiconvexa, y viceversa.

Proposición

Toda función monótonamente creciente o decreciente es cuasicóncava y cuasiconvexa a la vez.

Por lo tanto, como caso especial tenemos que toda función lineal es cuasicóncava y cuasiconvexa a la vez.
Para funciones cóncavas existe una propiedad que afirma que la suma de funciones cóncavas es cóncava. Sin embargo, para el caso de funciones cuasiconcávas no existe tal propiedad. La suma de dos funciones cuasicóncavas puede no ser cuasicóncava.
Una propiedad muy atractiva de las funciones cuasicóncavas por sobre las funciones cóncavas es la siguiente

Proposición

La transformación monótona de una función cuasicóncava es una función cuasicóncava.

Esta proposición nos dice que las funciones cuasicóncavas son *ordinales*.

Cuasiconcavidad

Existe una definición alternativa[2] de cuasiconcavidad y cuasiconvexidad:

Teorema

f es (estrictamente) cuasicóncava sii $S^{\geq} = \{\mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \geq k\}$ es un conjunto (estrictamente) convexo.

Teorema

f es (estrictamente) cuasiconvexa sii $S^{\leq} = \{\mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \leq k\}$ es un conjunto (estrictamente) convexo.

Observación

Para el caso de funciones cóncavas (convexas) estas propiedades representaban condiciones necesarias. Sin embargo, para funciones cuasicóncavas (cuasiconvexas) representan condiciones necesarias y suficientes.

A partir de esta definición alternativa es claro que toda función cóncava (convexa) es cuasicóncava (cuasiconvexa), pero la recíproca no es cierta.

[2] Es una definición alternativa porque es una condición necesaria y suficiente

Cuasiconcavidad estricta

Definición

Una función $f : D \to \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, es estrictamente cuasicóncava sii para dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in D$ y para $\lambda \in (0, 1)$ se verifica:

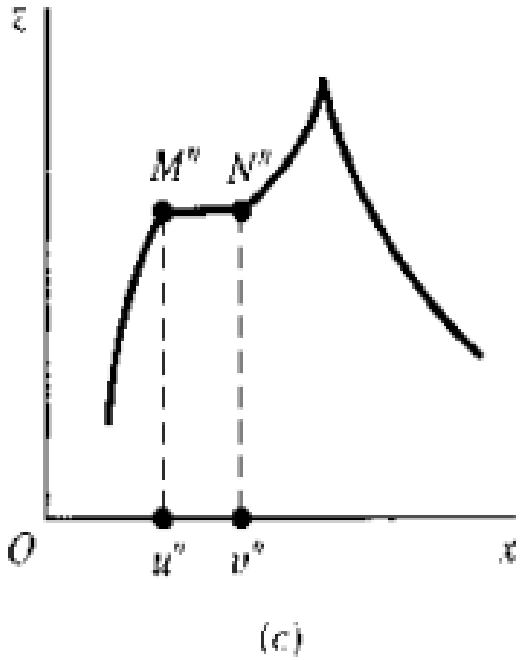
$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) \Rightarrow f[\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}] > f(\mathbf{y})$$

Definición

Una función $f : D \to \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, es estrictamente cuasiconvexa sii para dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in D$ y para $\lambda \in (0, 1)$ se verifica:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) \Rightarrow f[\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}] < f(\mathbf{x})$$

Cuasiconcavidad estricta



Fuente: Chiang y Wainwright (2005) pág. 364.

La figura muestra una función cuasicóncava pero que no es estrictamente cuasicóncava.

Cuasiconcavidad y cuasiconvexidad de funciones diferenciables

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, una función clase $\mathcal{C}^2$. Además, defínase la siguiente matriz:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema

f es cuasicóncava (cuasiconvexa) en D sii[‡] $\mathbf{B}$ es semidefinida negativa (positiva) en D.

Teorema

Si $\mathbf{B}$ es definida negativa (positiva) entonces f es estrictamente cuasicócava (cuasiconvexa).

Nótese la similitud entre estos teoremas y los de concavidad que apelaban a la matriz hessiana.
La matriz $\mathbf{B}$ es la matriz hessiana con una orla que tiene las derivadas primeras de la función. Para evaluar la cuasiconcavidad nos interesa que el diferencial segundo sea semidefinido negativo *a lo largo de la misma curva de nivel*.

Cuasiconcavidad y cuasiconvexidad de funciones diferenciables

Ejemplo 2: Determinar la cuasiconcavidad (distinguiendo la versión estricta) de la siguiente función $f(x,y) = xy$ en el ortante positivo y en el no negativo.

$$f_x = y,\ f_y = x,\ f_{xx} = 0,\ f_{yy} = 0,\ f_{xy} = 1$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = -y(0-x) + xy = 2xy$$

En el ortante positivo, $|\mathbf{B}| > 0$, entonces $\mathbf{B}$ es definida negativa y $f(\cdot)$ es estrictamente cuasicóncava.
En el ortante no negativo, $|\mathbf{B}| \geq 0$, entonces $\mathbf{B}$ es semidefinida negativa[3] y $f(\cdot)$ es cuasicóncava.

[3] Permutando la fila 2 con la 3 y la columna 2 con la 3 da el mismo determinante.

Cuasiconcavidad explícita

Existe una variante intermedia entre la cuasiconcavidad a secas y la variante estricta: la variante explícita.

Definición

Una función cuasicóncava f es explícitamente cuasicóncava sii para todo $\lambda \in (0,1)$ y dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ se verifica

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{y}) \Rightarrow f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) > f(\mathbf{y})$$

Definición

Una función cuasicóncava f es explícitamente cuasiconvexa sii para todo $\lambda \in (0,1)$ y dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ se verifica

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{y}) \Rightarrow f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$$

Cuasiconcavidad explícita

Observación

La cantidad de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ a comparar en la versión explícita es menor que en la "estricta", por lo que si f es estrictamente cuasicóncava (cuasiconvexa) entonces es explícitamente cuasicóncava (cuasiconvexa).

Observación

Para igual cantidad de pares $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, la versión explícita exige más que la cuasiconcavidad a secas, por lo que si f es explícitamente cuasicóncava (cuasiconvexa) entonces es cuasicóncava (cuasiconvexa).

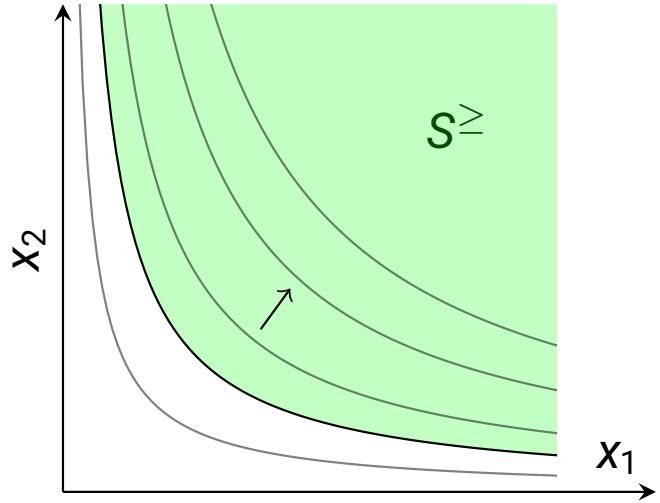
La cuasiconcavidad explícita elimina la posibilidad de segmentos planos horizontales en la superficie $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$, excepto en la cúspide.
La cuasiconcavidad estricta elimina la posibilidad de segmentos planos horizontales e inclinados en la superficie $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$.

Teorema

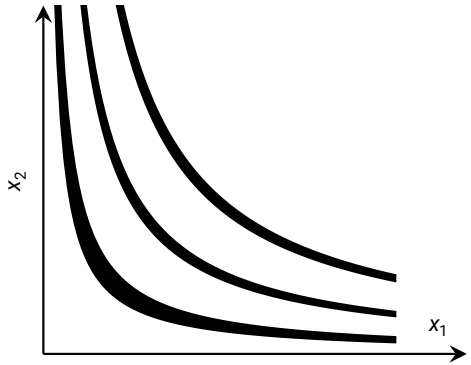
Si $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ es un máximo local de $f(\mathbf{x})$ sujeta a restricciones de igualdad, y $f(\mathbf{x})$ es explícitamente cuasicóncava, entonces $\mathbf{x}^*$ es un máximo global.

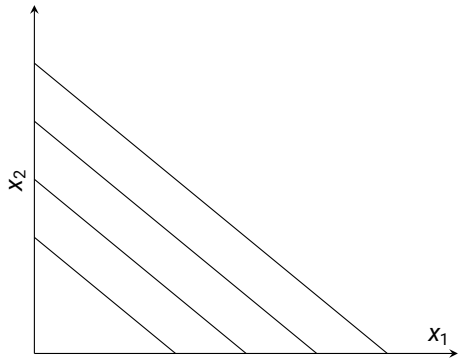
La cuasiconcavidad vista desde las curvas de nivel

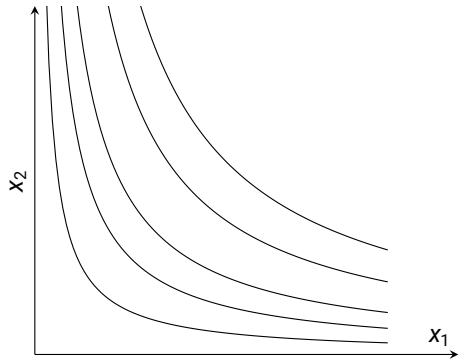
Consideremos una función de dos variables $f(x_1, x_2)$ cuyas curvas de nivel se grafican



El conjunto $S^{\geq}$ es convexo. Por lo tanto, esta función es cuasicóncava.
Como la cuasiconcavidad permite que haya segmentos planos horizontales, las curvas de nivel pueden ser gruesas.





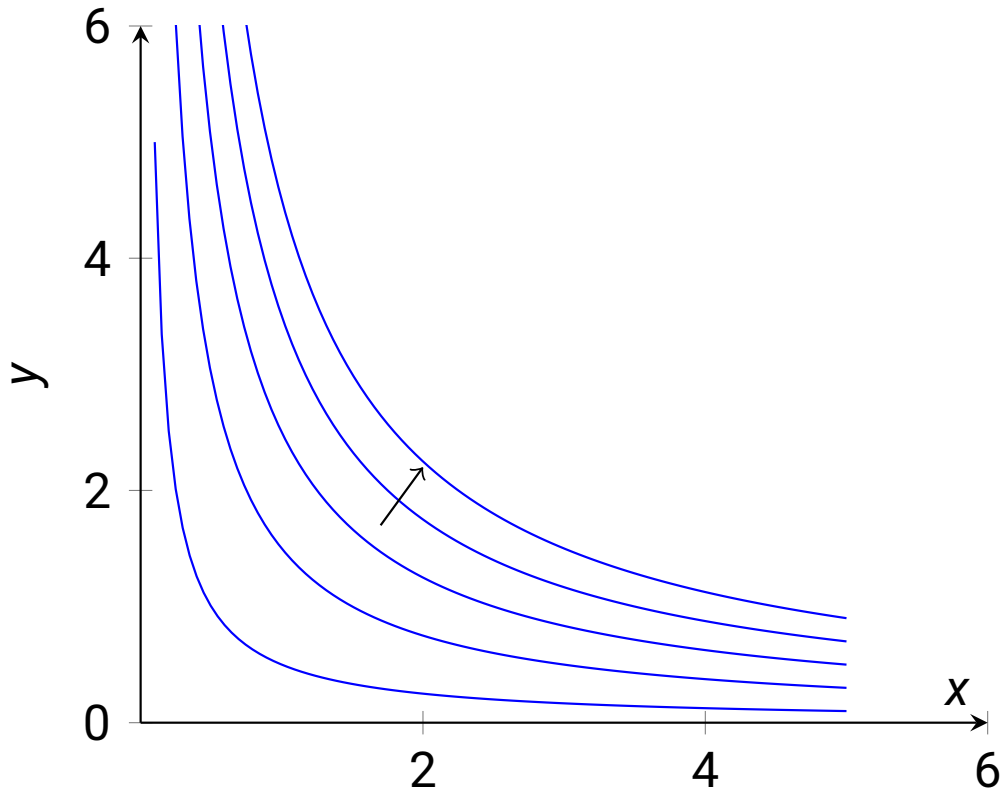


Cuando la función es explícitamente cuasicóncava, las curvas de nivel ya no pueden ser gruesas, pero pueden tener segmentos rectos.

La cuasiconcavidad vista desde las curvas de nivel

Ejemplo 2 (cont.): Para graficar las curvas de nivel de $f(x, y) = x\,y$, fijamos $k \in \mathbb{R}$ y despejamos

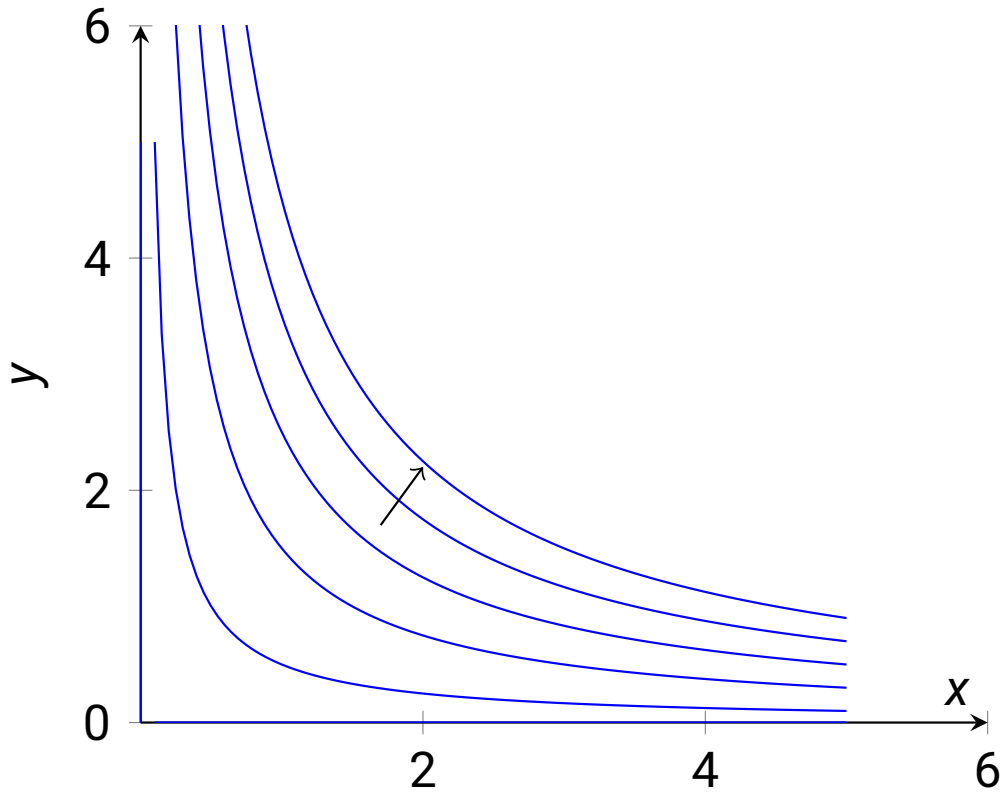
$$x\,y = k \Rightarrow y = \frac{k}{x} \text{ con } x \neq 0$$



En el ortante positivo, $S^{\geq}$ es estrictamente convexo. Por lo tanto, $f(\cdot)$ es estrictamente cuasicóncava.

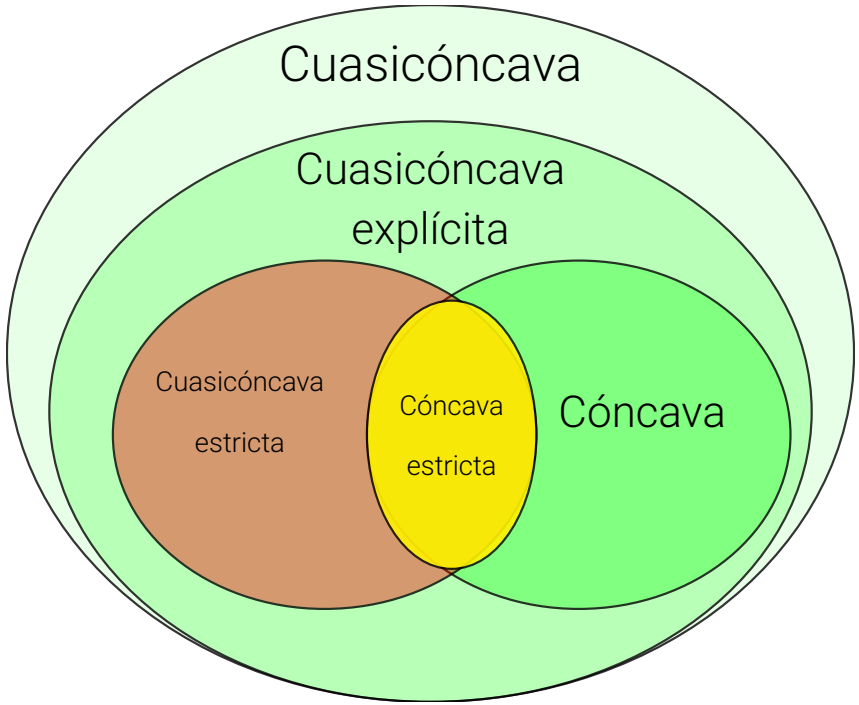
La cuasiconcavidad vista desde las curvas de nivel

¿Cuál es la curva de nivel de $k = 0$? Si $k = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$, o ambas al mismo tiempo. La curva de nivel coincide con los ejes.



En el ortante no negativo, $S^{\geq}$ es convexo, pero no estricto. Además, como las curvas de nivel no son gruesas, $f(\cdot)$ es cuasicóncava explícita.

Concavidad y cuasiconcavidad



- Toda función estrictamente cóncava es estrictamente cuasicóncava, que a su vez es explícitamente cuasicóncava, que a su vez es cuasicóncava. Las recíprocas no son ciertas; por ejemplo, hay funciones cuasicóncavas que no son explícitamente cuasicóncavas.
- Toda función cóncava es explícitamente cuasicóncava, aunque la recíproca no es cierta.
- Existen funciones cóncavas que no son estrictamente cuasicóncavas, y funciones estrictamente cuasicóncavas que no son cóncavas.

Cuasiconcavidad y su aplicación en ciencias económicas

En funciones de dos variables, la cuasiconcavidad (estricta) es equivalente a tasas marginales de sustitución no crecientes (decrecientes). Además, las funciones cuasicóncavas son ordinales. Por esto, son muy usadas para representar funciones de utilidad o de producción.
En teoría del consumidor, cuando la función de utilidad tiene curvas de nivel que no son gruesas se dice que las preferencias son localmente no saciadas. Es un supuesto muy común, y por ende, es usual que en aplicaciones económicas la función a maximizar sea, al menos, explícitamente cuasicóncava.
Por ejemplo, la función Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ con $\alpha, \beta > 0$ es explícitamente cuasicóncava en el ortante no negativo, y estrictamente cuasicóncava en el ortante positivo. Además, su gradiente no se anula en el ortante positivo. Entonces, el punto estacionario de una función Cobb-Douglas sujeto a una restricción de igualdad será un máximo global y único.

Cuasiconcavidad y optimización

Las funciones cuasicóncavas son convenientes para representar funciones de utilidad.
¿Qué podemos decir de la maximización restringida de funciones cuasicóncavas?
La cuasiconcavidad por sí sola no asegura que un punto estacionario sea máximo local.
Se requiere una condición más:

Teorema de Arrow-Enthoven

Si $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ cumple las CPO, $f(\mathbf{x})$ es (estrictamente) cuasicóncava, las restricciones son lineales y se satisface al menos una de las siguientes condiciones:

1. $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$
2. $f(\mathbf{x})$ es (estrictamente) cóncava.

Entonces $\mathbf{x}^*$ es un máximo global (único).

Además, las funciones estrictamente cuasicóncavas cuentan con la siguiente propiedad.

Teorema

Si $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ es un máximo local de $f(\mathbf{x})$ sujeta a restricciones de igualdad, y $f(\mathbf{x})$ es estrictamente cuasicóncava, entonces $\mathbf{x}^*$ es un máximo global único.

Teorema de la envolvente

Consideremos un problema de optimización restringida con dos variables y una restricción:

$$\max_{x,y} f(x, y, \alpha) \quad \text{s. a } g(x, y, \alpha) = 0$$

La lagrangiana es

$$\mathcal{L} = f(x, y, \alpha) + \lambda [-g(x, y, \alpha)]$$

Las condiciones de primer orden resultan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x &= f'_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y &= f'_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda &= -g(x, y, \alpha) = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de 3 ecuaciones en 3 variables obtenemos los valores óptimos como función de α:

$$x^* = x^*(\alpha) \qquad y^* = y^*(\alpha) \qquad \lambda^* = \lambda^*(\alpha)$$

Teorema de la envolvente

Si reemplazamos estos valores óptimos en la función objetivo:

$$f^*(\alpha) = f^*(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha) \tag{1}$$

obtenemos la función objetivo indirecta, que es una función exclusivamente del parámetro α.

Teorema de la envolvente

$$\frac{d}{d\alpha} f^*(x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$$

Demostración: El diferencial total de f^* respecto a α es:

$$\frac{df^*}{d\alpha} = f'_x \frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + f'_y \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + f'_\alpha \tag{2}$$

Por otro lado, el diferencial total de la restricción respecto a α (en el óptimo) es:

$$\frac{dg}{d\alpha} = g'_x \frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + g'_y \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + g'_\alpha = 0 \tag{3}$$

Multiplicando (3) por λ^* y restándosela a (2):

$$\frac{df^*}{d\alpha} = (f'_x - \lambda^* g'_x) \frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + (f'_y - \lambda^* g'_y) \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + f'_\alpha - \lambda^* g'_\alpha$$

Teorema de la envolvente

Los términos entre paréntesis se cancelan por las CPO:

$$\frac{df^*}{d\alpha} = f'_\alpha - \lambda^* g'_\alpha = \mathcal{L}_\alpha \quad \square$$

Bibliografía

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* [Cap. 12]. McGraw-Hill Education.

Intriligator, M. (2002). *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Society for Industrial; Applied Mathematics.

Simon, C. & Blume, L. (1994). *Mathematics for Economists* [Caps. 19.1 y 19.2]. Norton.

Optimización con restricciones de desigualdad

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

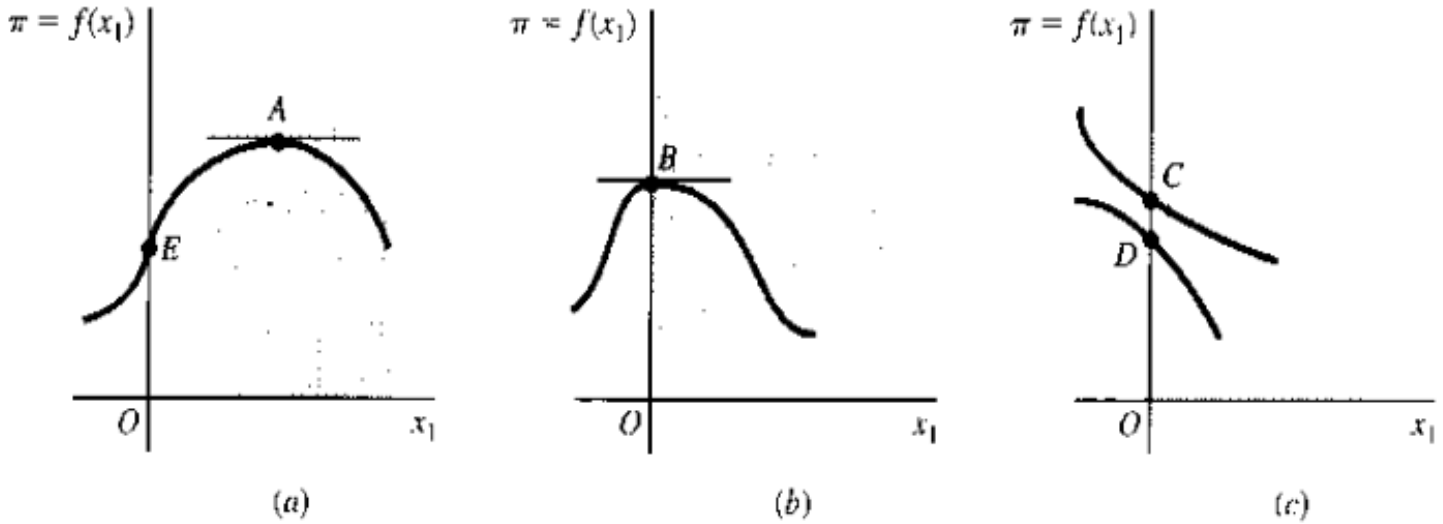
Optimización con restricciones de no negatividad

Comencemos estudiando el problema de optimización con la restricción de que las variables sean no negativas.

$$\max_{x_1} \pi = f(x_1) \quad \text{sujeto a} \quad x_1 \geq 0$$

Asumimos que $f(\cdot)$ es diferenciable.
Hay tres casos que pueden ocurrir para la existencia de máximo:

$$f'(x_1) = 0 \quad \text{and} \quad x_1 > 0 \quad \text{[point } A\text{]} \qquad \textbf{(13.2)}$$
$$f'(x_1) = 0 \quad \text{and} \quad x_1 = 0 \quad \text{[point } B\text{]} \qquad \textbf{(13.3)}$$
$$f'(x_1) < 0 \quad \text{and} \quad x_1 = 0 \quad \text{[points } C \text{ and } D\text{]} \qquad \textbf{(13.4)}$$



Fuente: Chiang y Wainwright (2005) pág. 403.

Optimización con restricciones de no negatividad

Estos tres casos pueden resumirse:

$$f'(x_1) \leq 0, x_1 \geq 0 \text{ y } x_1\, f'(x_1) = 0$$

Al menos una de las dos variables x_1 y $f(x_1)$ tiene que valer cero. Esta es la condición necesaria de primer orden cuando se incluyen restricciones de no negatividad.
La extensión al caso de n variables es:

$$\max_{x_1,\cdots,x_n} \pi = f(x_1,\cdots,x_n) \quad \text{sujeto a } x_j \geq 0 \quad (j = 1,\cdots,n)$$

Las condiciones necesarias de primer orden son:

$$f_{x_j}(\cdot) \leq 0,\ x_j \geq 0 \text{ y } x_j\, f_j = 0 \quad (j = 1,\cdots,n)$$

Si se buscara minimizar π, las condiciones necesarias de primer orden serían:

$$f_{x_j}(\cdot) \geq 0,\ x_j \geq 0 \text{ y } x_j\, f_j = 0 \quad (j = 1,\cdots,n)$$

Optimización con restricciones de desigualdad

Ahora consideremos un problema de optimización con restricciones de desigualdad más generales:

$$\max_{x_1,\cdots,x_n} \pi = f(x_1,\cdots,x_n) \quad \text{sujeto a} \begin{cases} g^1(x_1,\cdots,x_n) \leq r_1 \\ \cdots \quad \cdots \\ g^m(x_1,\cdots,x_n) \leq r_m \\ x_1,\cdots,x_n \geq 0 \end{cases}$$

Vamos a convertir este problema en uno de restricciones de igualdad incorporando dos variables $s_1,\cdots,s_m$ de holgura complementaria

$$\max_{x_1,\cdots,x_n,s_1,\cdots,s_m} \pi = f(x_1,\cdots,x_n) \quad \text{sujeto a} \begin{cases} g^1(x_1,\cdots,x_n) + s_1 = r_1 \\ \cdots \quad \cdots \\ g^m(x_1,\cdots,x_n) + s_m = r_m \\ x_1,\cdots,x_n,s_1,\cdots,s_m \geq 0 \end{cases}$$

La lagrangiana es

$$\tilde{\mathcal{L}} = f(x_1,\cdots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[r_j - g^j(x_1,\cdots,x_n) - s_j \right]$$

Optimización con restricciones de desigualdad

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_i} \leq 0, \quad x_i \geq 0 \quad \text{y} \quad x_i \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_i} = 0$$
$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_j} \leq 0, \quad s_j \geq 0 \quad \text{y} \quad s_j \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_j} = 0$$
$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \lambda_j} = 0$$

para $i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$.
Ahora vamos a hacer algunos reemplazos para eliminar las variables de holgura complementaria.
Como $\tilde{\mathcal{L}}_{s_j} = -\lambda_j \leq 0$ entonces $\lambda_j \geq 0$. Además, $s_j = r_j - g^j(\cdot) \geq 0$. Reemplazando:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{x_i} \leq 0, \quad x_i \geq 0 \quad \text{y} \quad x_i \, \tilde{\mathcal{L}}_{x_i} = 0$$
$$r_j - g^j(\cdot) \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0 \quad \text{y} \quad \lambda_j \left(r_j - g^j(\cdot)\right) = 0$$

Estas constituyen las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para máximo.

Optimización con restricciones de desigualdad

Por otro lado, consideremos la siguiente lagrangiana que no contiene las variables de holgura complementaria:

$$\mathcal{L} = f(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[r_j - g^j(x_1, \cdots, x_n) \right]$$

Las condiciones de KKT pueden escribirse a partir de esta lagrangiana, ya que las $\mathcal{L}_{x_i}$ no cambian y las restricciones pasan a ser iguales a $\mathcal{L}_{\lambda_j}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x_i} \leq 0, \quad x_i \geq 0 \quad \text{y} \quad x_i \, \mathcal{L}_{x_i} = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda_j} \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0 \quad \text{y} \quad \lambda_j \, \mathcal{L}_{\lambda_j} = 0 \end{aligned}$$

Para un problema de mínimo solo cambian las $\mathcal{L}_{x_i}$ a ≥ 0 y las $\mathcal{L}_{\lambda_j}$ a ≤ 0.

Observación

Nótese que las condiciones de KKT implican que se busca maximizar $\mathcal{L}$ respecto a las x_i, y minimizar $\mathcal{L}$ respecto a los λ_j. Las condiciones de KKT "buscan" puntos de silla de la lagrangiana, que a su vez son máximos de la función objetivo original.

Optimización con restricciones de desigualdad

Las condiciones de KKT son necesarias para el problema de optimización sujeto a restricciones de desigualdad si se cumple la calificación de restricciones.
Algunas consideraciones del problema de optimización con restricciones de desigualdad:

- La cantidad de restricciones m puede ser igual o mayor al número de variables n.
- Para un ejercicio de maximización, las restricciones de desigualdad deben estar escritas como restricciones de menor o igual $\leq$. En caso contrario se las multiplica por (-1) miembro a miembro.
- Para un ejercicio de minimización, las restricciones de desigualdad deben estar escritas como restricciones de mayor o igual $\geq$. En caso contrario se las multiplica por (-1).
- Si hay una restricción de igualdad $g^j(\cdot) = r_j$ para algún j, entonces $\mathcal{L}_{\lambda_j} = 0$
- Si no hay restricciones de no negatividad sobre x_i para algún i, entonces $\mathcal{L}_{x_i} = 0$

Optimización con restricciones de desigualdad

Ejemplo 1:

$$\max_{x,y} f(x,y) = x^2 + x + 4y^2 \quad \text{sujeto a} \begin{cases} 2x + 2y \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

La lagrangiana es

$$\mathcal{L} = x^2 + x + 4y^2 + \lambda(1 - 2x + 2y)$$

Las condiciones de KKT son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x = 2x + 1 - 2\lambda \leq 0, \quad x \geq 0, \quad x(2x + 1 - 2\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y = 8y - 2\lambda \leq 0, \quad y \geq 0, \quad x(8y - 2\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = 1 - 2x - 2y \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda(1 - 2x - 2y) = 0 \end{aligned}$$

De la primer condición:

$$\lambda \geq x + 1/2 > 0$$

Esto implica que $\mathcal{L}_\lambda = 0$:

$$1 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow 2x + 2y = 1$$

Tenemos que hacer prueba y error. Veamos primero el caso en que $x = 0$. Esto implica que $y = 1/2$. Y entonces $\mathcal{L}_y$ tiene que ser igual a cero:

Optimización con restricciones de desigualdad

$$8y - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Ya tenemos los valores de x, y, λ, pero nos queda verificar que $\mathcal{L}_x < 0$ (recordar que empezamos suponiendo que $x = 0$, no sabemos si este punto es estacionario).

$$\mathcal{L}_x = 2x + 1 - 2\lambda = 0 + 1 - 4 = -3 < 0$$

Como se cumplen todas las condiciones de KKT, el punto $(x, y) = (0, 1/2)$ es estacionario.
Ahora consideremos el caso en que $x > 0$. Esto implica que $\mathcal{L}_x = 0$ y entonces $\lambda = 1/2(2x + 1) > 0$.
Como $\lambda > 0$ entonces

$$\mathcal{L}_\lambda = 1 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow 2x + 2y = 1$$

Acá se abren dos casos posibles: $y = 0$ e $y > 0$. Si $y > 0$ entonces $\mathcal{L}_y = 0$. Como tanto $\mathcal{L}_x$ y $\mathcal{L}_y$ son cero los igualamos

$$2x + 1 - 2\lambda = 8y - 2\lambda$$

$$2x = 8y - 1$$

Optimización con restricciones de desigualdad

Reemplazando en $\mathcal{L}_\lambda$:

$$8y - 1 + 2y = 1 \Rightarrow y = 1/5 \Rightarrow x = 3/10$$

Entonces el segundo punto estacionario es $(x, y) = (3/10, 1/5)$.
El caso que nos queda es $y = 0$. Reemplazando en $\mathcal{L}_\lambda$:

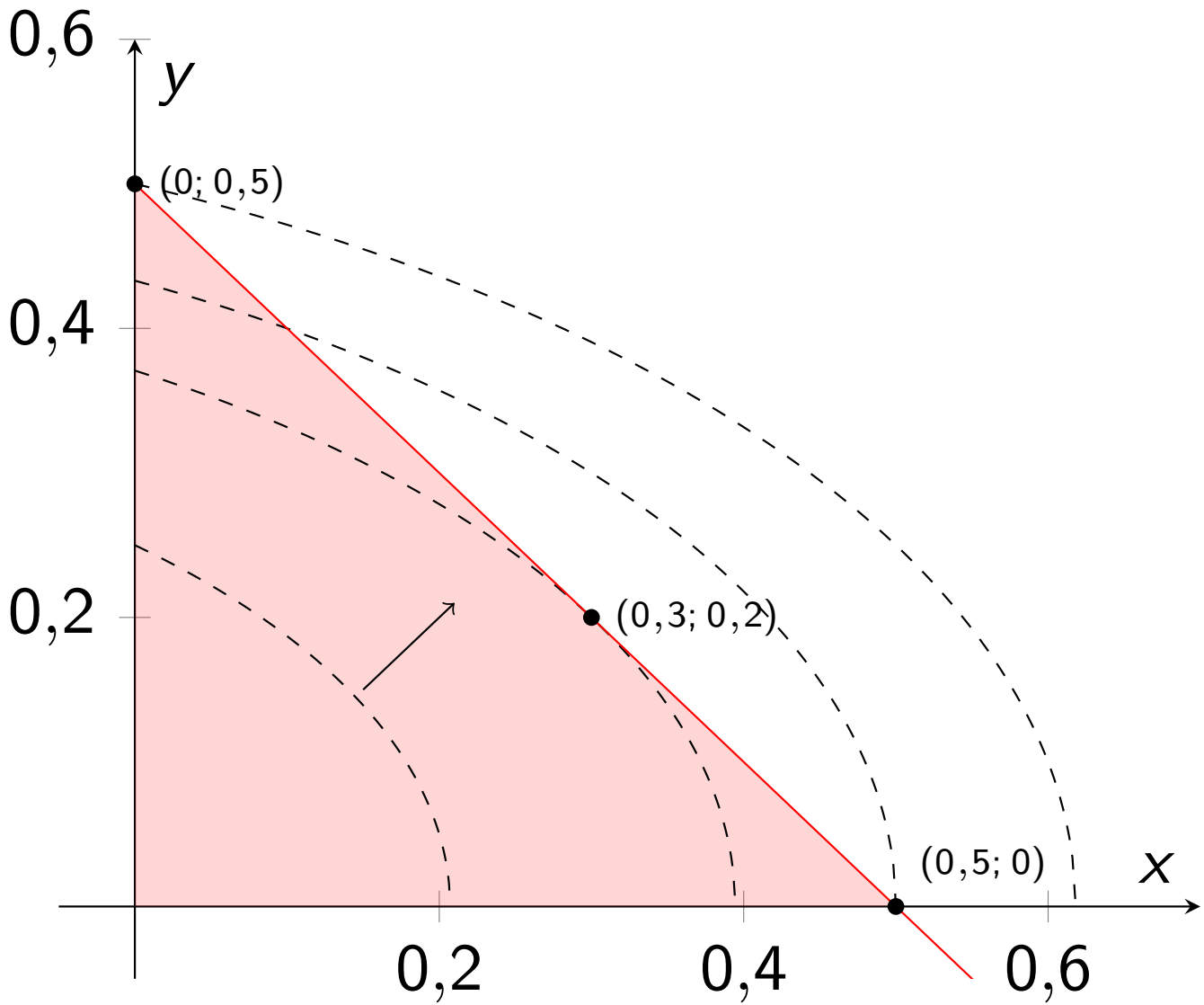
$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$$

Entonces el otro punto estacionario es $(x, y) = (1/2, 0)$.
Reemplazando los tres puntos estacionarios en la función objetivo

$$f(0, 1/2) = 1$$

$$f(3/10, 1/5) = 0{,}55$$

$$f(1/2, 0) = 0{,}75$$



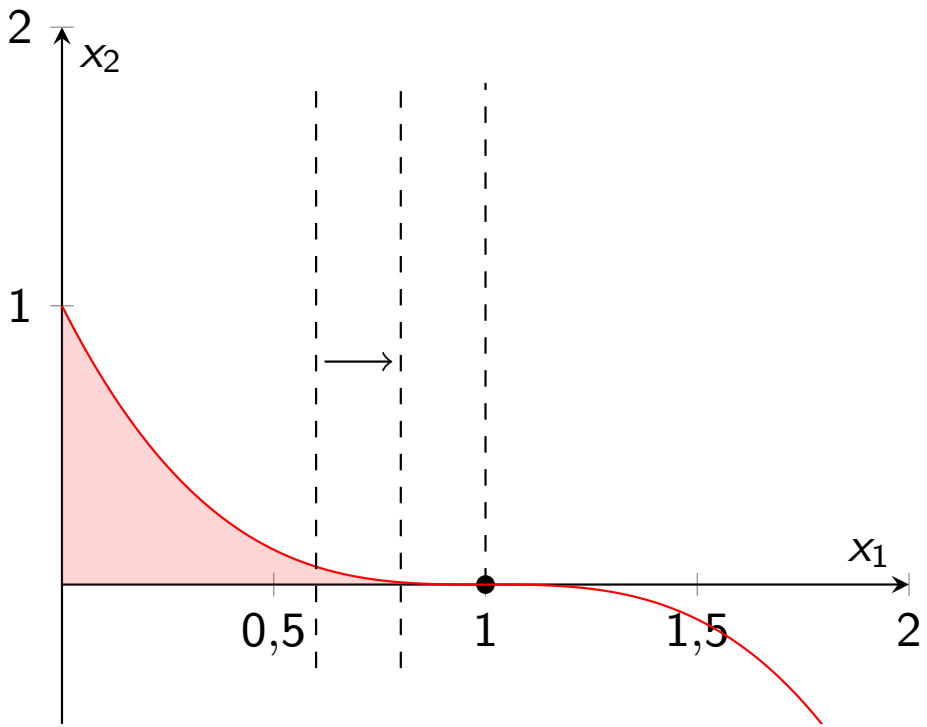
Viendo el gráfico queda claro que $(0, 1/2)$ y $(1/2, 0)$ son máximos local condicionados, y que $(0{,}3; 0{,}2)$ no es un máximo local. El máximo global es $(0, 1/2)$.

La calificación de restricciones

La estrategia de usar multiplicadores de Lagrange para convertir un problema de optimización con restricciones (de igualdad o desigualdad) en uno de optimización libre es muy inteligente. No obstante, en algunos casos no funciona.

Ejemplo 2:

$$\max_{x_1} x_1 \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



La calificación de restricciones

Del gráfico se observa que el máximo global restringido ocurre en $(1, 0)$.
La lagrangiana es

$$\mathcal{L} = x_1 + \lambda \left[-x_2 - (1 - x_1)^3 \right]$$

Por las condiciones de KKT, como $x_1^* > 0$ entonces $\mathcal{L}_{x_1} = 0$
Sin embargo:

$$\mathcal{L}_{x_1} = 1 - 3\lambda(1 - x_1)^2 = 1 > 0$$

Es decir, las condiciones de KKT no se cumplen en el óptimo.
Las condiciones de KKT pierden su fuerza como condiciones necesarias cuando las restricciones presentan una "forma determinada". El estudio de la calificación de restricciones sirve para descartar estos casos patológicos.
Existen varias calificaciones de restricciones.

La calificación de restricciones

Supongamos sin pérdida de generalidad que h restricciones se cumplen con igualdad y $m - h$ con desigualdad.

Condiciones suficientes para que las restricciones califiquen

1. La matriz jacobiana, de dimensión $h \times n$ que contiene las derivadas parciales primeras de las restricciones $[\partial g^j / \partial x_i (\mathbf{x}^*)]$ evaluada en el óptimo, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, h$ tiene rango máximo h.
2. (**Slater**) Existe una bola U con centro en $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $g^1, \cdots, g^h$ son convexas en U y existe un punto $\mathbf{z} \in U$ tal que $g^j(\mathbf{z}) < r_j$ para todo $j = 1, \cdots, h$.
3. $g^1, \cdots, g^h$ son lineales.

La primera condición es la que se usa cuando el problema es de optimización con restricciones de igualdad.

La calificación de restricciones

Es importante remarcar que estas condiciones no se solapan completamente.

Observación

Nótese que estas son condiciones suficientes para que las condiciones de KKT sean necesarias para el óptimo local.

Ejemplo 2 (cont.): Las restricciones activas en $(1,0)$ son $x_2 - (1-x_1)^3 = 0$ y $-x_2 = 0$. El jacobiano de la condición 1) es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3(1-x_1)^2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que tiene rango 1 en vez de 2. Por lo tanto, esta condición no se cumple.

La calificación de restricciones

Para la condición de Slater veamos si las dos restricciones activas son convexas en un entorno de x^*.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -6(1-x_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|H_1| = -6(1-x_1) \qquad |H_2| = 0$$

Como $|H_1| < 0$ si $x_1 < 1$ y $|H_1| > 0$ si $x_1 > 1$ entonces no se cumple.

La calificación de restricciones

Ejemplo 1 (cont.): Comprobemos que la calificación de restricciones se cumple en $(0, 1/2)$.
La matriz jacobiana de la condición 1) es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que tiene rango 2. Por lo tanto, esta calificación de restricciones se cumple
Las dos restricciones activas son lineales. Por lo tanto, se cumple la condición 3).
Como las restricciones son lineales también son convexas, y existe $\epsilon > 0$ tal que en $(1/2\,\epsilon, 1/2 - \epsilon)$ las dos restricciones se cumplen con desigualdad: $x = 1/2\,\epsilon > 0$ y $2x + 2y = \epsilon + 1 - 2\epsilon = 1 - \epsilon < 1$. Por lo tanto, se cumple la condición de Slater.

Condiciones suficientes para extremo global

Teorema de Arrow-Enthoven

Supongamos que el vector $\mathbf{x}^*$ satisface las condiciones de KKT para máximo del problema de optimización con restricciones de desigualdad.
Si $f(\mathbf{x})$ es (estrictamente) cuasicóncava, las funciones $g^j(\mathbf{x})$ son cuasiconvexas para todo $j = 1, 2, \cdots, m$, y se satisface al menos una de las siguientes condiciones:

1. $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$
2. $f(\mathbf{x})$ es (estrictamente) cóncava.

Entonces $\mathbf{x}^*$ es un máximo global (único).

Otra forma de encontrar el máximo global cuando Arrow-Enthoven no se cumple es comparar los valores que toma la función objetivo en todos los candidatos a óptimo (puntos que: cumplen KKT + no cumplen CR), y elegir el mayor. Este procedimiento funciona en casi todos los problemas por el teorema de Weierstrass (toda función continua alcanza su máximo global en un conjunto acotado y cerrado).

Programación cóncava, cuasicóncava y lineal

Los problemas de optimización con restricciones de desigualdad se suelen clasificar de la siguiente manera

	Función objetivo	Restricciones	KKT
Programación cóncava	Cóncava	Convexas	Suficientes para máximo global
Programación cuasicóncava	Cuasicóncava	Cuasiconvexas	Ni necesarias ni suficientes
Programación lineal	Lineal	Lineales	NyS para máximo global

En programación cóncava, por el teorema de Slater, solo necesitamos que la región factible tenga un punto interior para que KKT sean necesarias para un máximo local.

En programación cuasicóncava tenemos el teorema de Arrow-Enthoven que nos exige que el gradiente de la función objetivo no se anule en el punto que cumple KKT, para tener suficiencia global. En este caso, KKT no siempre son necesarias para un óptimo.

En programación lineal las condiciones de KKT son siempre necesarias y suficientes para un máximo global.

Programación lineal y dualidad

Consideremos el problema canónico de programación lineal

$$\max_{x_1,\cdots,x_n} \; c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots + c_n\,x_n \quad \text{sujeto a} \begin{cases} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n \leq r_1 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n \leq r_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

A este problema lo denominamos el **problema primal**. Y consideremos este otro problema

$$\min_{\lambda_1,\cdots,\lambda_m} \; r_1\,\lambda_1 + r_2\,\lambda_2 + \cdots + r_n\,\lambda_m \quad \text{sujeto a} \begin{cases} a_{11}\,\lambda_1 + \cdots + a_{m1}\,\lambda_m \geq c_1 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{1n}\,\lambda_1 + \cdots + a_{mn}\,\lambda_m \geq c_n \\ \lambda_1, \cdots, \lambda_m \geq 0 \end{cases}$$

Que denominamos el **problema dual**.

Programación lineal y dualidad

Escritos en notación matricial:

$$\max_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \text{sujeto a} \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{r} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad \mathbf{r}^T\boldsymbol{\lambda} \quad \text{sujeto a} \begin{cases} \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{c} \\ \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

Programación lineal y dualidad

Algunas diferencias entre estos problemas son:

1. El problema primal es de maximización, mientras que el dual es de minimización.
2. Los instrumentos del problema primal son $x_1, \cdots, x_n$, mientras que los del problema dual son $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$.
3. Los coeficientes de la función objetivo del problema primal son la restricción del problema dual, y viceversa.
4. El problema primal tiene m restricciones, mientras que el problema dual tiene n.

Teorema de dualidad

El problema primal y el problema dual tienen la misma solución

Se demuestra planteando las condiciones de KKT para cada problema y verificando que son iguales.

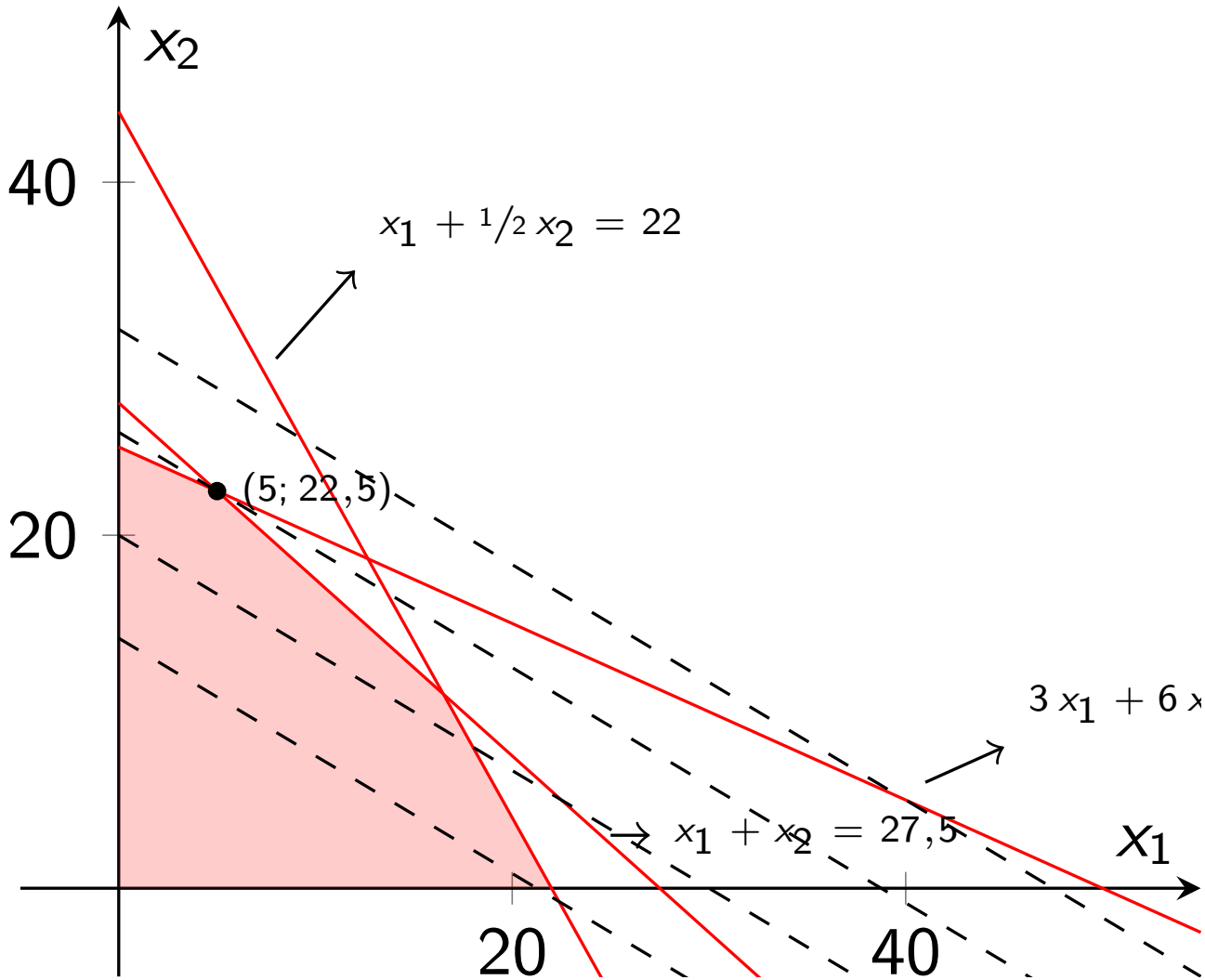
Aclaración

El teorema de dualidad también se extiende al caso de programación no lineal cuando se cumple la calificación de restricciones.

Ejemplo 3: Un panadero tiene 150 kgs. de harina, 22 kgs. de azúcar y 27,5 kgs. de manteca, con los cuales puede hacer dos tipos de facturas. Para hacer una docena de medialunas necesita 3 kgs. de harina, 1 kg. de azúcar y 1 kg. de manteca. Mientras que para hacer una docena de cremonas dulces necesita 6 kgs. de harina, 1/2 kg. de azúcar y 1 kg. de manteca. El ingreso de vender una docena de medialunas se estima en 20, y la de cremonas dulces en 30. ¿Cuántas docenas de cada tipo de factura va a elaborar el panadero?

$$\max_{x_1, x_2} \quad 20x_1 + 30x_2 \qquad \text{sujeto a} \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 150 \\ x_1 + {}^1/_2 x_2 \leq 22 \\ x_1 + x_2 \leq 27{,}5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Programación lineal y dualidad



El punto $(5; 22{,}5)$ tiene que cumplir KKT.

$$\mathcal{L} = 20x_1 + 30x_2 + \lambda_1(150 - 3x_1 - 6x_2) + \lambda_2(22 - x_1 - {}^1\!/_2\, x_2) + \lambda_3(27{,}5 - x_1 - x_2)$$

$$\lambda_2^* = 0$$

$$\mathcal{L}_{x_1} = 20 - 3\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 20 - 3\lambda_1$$

$$\mathcal{L}_{x_2} = 30 - 6\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow 30 - 6\lambda_1 - 20 + 3\lambda_1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1^* = \frac{10}{3} \Rightarrow \lambda_3^* = 10$$

El problema dual es

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} 150\lambda_1 + 22\lambda_2 + 27{,}5\,\lambda_3 \quad \text{sujeto a} \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 20 \\ 6\lambda_1 + {}^1\!/_2\,\lambda_2 + \lambda_3 \geq 30 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Por el teorema de dualidad, $({}^{10}\!/_3, 0, 10)$ tiene que cumplir KKT.

$$\mathcal{L} = -150\lambda_1 - 22\lambda_2 - 27{,}5\,\lambda_3 + x_1(-20 + 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + x_2(-30 + 6\lambda_1 + {}^1\!/_2\,\lambda_2 + \lambda_3)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} = -150 + 3x_1 + 6x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 50 - 2x_2$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_3} = -27{,}5 + x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow 50 - 2x_2 + x_2 = 27{,}5$$

$$\Rightarrow x_2 = 22{,}5 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_2} = -22 + x_1 + {}^1\!/_2\,x_2 = -22 + 5 + 11{,}25 = -5{,}75 < 0$$

Programación lineal y dualidad

¿Cómo se puede interpretar el problema dual y que su solución sea la misma que la del problema primal?
Para motivar el problema dual, imagínese que el panadero se quiere retirar y terceriza su local. Es decir, le vende los insumos a una tercera parte para que éste haga las medialunas y las cremonas ¿A qué precio va a vender los insumos? Por cada docena de medialunas el panadero cobrará $3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, mientras que por cada docena de cremonas cobrará $6\lambda_1 + 1/2\,\lambda_2 + \lambda_3$, y va a querer que su beneficio por insumo sea, al menos, el mismo que antes, sino no se retira. Entonces, para que el panadero acepte se debe cumplir

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 20 \\ 6\lambda_1 + 1/2\,\lambda_2 + \lambda_3 \geq 30 \end{cases}$$

Por otro lado, esta tercer parte querrá pagar lo menos posible cada insumo, entonces buscará minimizar su gasto total $150\lambda_1 + 22\lambda_2 + 27{,}5\lambda_3$.
En el problema dual se busca minimizar el gasto sombra en insumos (harina, azúcar y manteca) sujeto a que el precio de las medialunas sea, al menos, 20 y el de las cremonas, 30.

Programación lineal y dualidad

El teorema de dualidad nos muestra que la solución de este problema de *valorización* de los factores de producción es igual al de *asignación* de los niveles de producción. Estos problemas son inseparables. Cuando se asignan los niveles de producción de cada actividad (en este caso, medialunas y cremonas), implícitamente se le está atribuyendo un valor a los factores de producción (harina, azúcar y manteca). Y viceversa. Cuando se le asigna un valor a los insumos, en función de su contribución al beneficio total, implícitamente se está determinando la producción de cada actividad.
Además de esta relación que tiene una importante interpretación económica, el teorema de dualidad es útil en la práctica ya que en algunos casos es computacionalmente más fácil resolver el problema dual o viceversa. En este ejemplo el problema primal se pudo resolver gráficamente, mientras que el dual no.

Bibliografía

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* [Cap. 13]. McGraw-Hill Education.

Simon, C. & Blume, L. (1994). *Mathematics for Economists* [Cap. 19.5]. Norton.

Sydsæter, K., Hammond, P., Strøm, A. & Carvajal, A. (2016). *Essential Mathematics for Economic Analysis* (5.ª ed.) [Cap. 17]. Pearson.

Ecuaciones diferenciales

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una relación funcional del tipo:

$$F(t, y, y', y'', \cdots, y^{(k)}) = 0 \tag{1}$$

donde $y = y(t), y' = \frac{dy}{dt}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots, y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$.
Si la función $y(\cdot)$ depende de dos o más variables independientes entonces se trata de una ecuación diferencial en derivadas parciales. De lo contrario se dice que la ecuación diferencial es ordinaria.
El orden de una ecuación diferencial está dado por el máximo orden de derivación que aparece en la ecuación.
Si F está expresada en forma polinómica, entonces la ecuación diferencial es lineal sii en cada uno de sus términos la función incógnita está elevada a la potencia unitaria.
Si $F(\cdot)$ no depende de t directamente, es decir, solo depende indirectamente a través de y y sus derivadas, entonces la ecuación diferencial es autónoma.
A veces puede despejarse la derivada de mayor orden de (1):

$$y^{(k)} = f(t, y, y', y'', \cdots, y^{(k-1)})$$

En estos casos se dice que la ecuación diferencial está escrita en forma normal.

Ecuaciones diferenciales

Ejemplo 1: El dinero y depositado en el banco en el momento t genera intereses a una tasa continua r:

$$y'(t) = r\, y(t)$$

Para resolver esta ecuación se puede integrar miembro a miembro:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = r$$

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int r dt$$

$$\ln y(t) = r\, t + C$$

$$y(t) = e^{r\, t + C} = e^{C}\, e^{r\, t} = y_0\, e^{r\, t}$$

Para saber cuánto dinero hay depositado en el banco en el momento t debe conocerse el depósito inicial.
La constante sin determinar es la constante de integración y habrá tantas de estas constantes como orden de la ecuación diferencial (en este caso, una).
Cuando la solución queda expresada en función de la constante sin determinar hablamos de la solución general de la ecuación diferencial. A partir de esta solución general y de darle valores a la(s) constante(s) de integración se obtiene la solución particular de la ecuación diferencial.

PVI y PVF

La especificación del problema que involucra a la ecuación diferencial suele venir acompañado de condiciones iniciales.

Definición

Denominamos como **problema con valores iniciales** (PVI) a un problema del tipo

$$y'' = f(t, y, y'), \qquad \begin{array}{l} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{array}$$

Estas condiciones iniciales permiten hallar las constantes indeterminadas.
A veces la ecuación diferencial no trae especificadas n condiciones iniciales, sino condiciones en distintos momentos del tiempo.

Definición

Denominamos como **problema con valores de frontera** (PVF) a un problema del tipo

$$y'' = f(t, y, y'), \qquad \begin{array}{l} y(t_0) = y_0 \\ y(t_1) = y_1 \end{array}$$

Existencia y unicidad

Teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales

Consideremos el siguiente problema con valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Supongamos que f es continua en (t_0, y_0). Entonces existe una función continuamente diferenciable $y : I \to \mathbb{R}$, donde $I = (t_0 - a, t_0 + a)$, tal que $y'(t) = f(y, t)$ y $y(t_0) = y_0$ para todo $t \in I$. Es decir, $y(t)$ es solución del PVI.
Además, si f es continuamente diferenciable[a] en (t_0, y_0) entonces la solución $y(t)$ es única.

[a] Alcanza con que f sea Lipschitz. Continuamente diferenciable en un punto implica Lipschitz en ese punto, pero la recíproca no es cierta.

Este teorema se extiende al caso en que la ecuación diferencial sea de orden j, siempre y cuando se especifiquen j condiciones iniciales.
Ejemplo 2: Consideremos el PVI

$$y' = 3\,y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

La función $3\,y^{2/3}$ es continua en todo su dominio, por lo tanto este problema tiene solución. Sin embargo, no es continuamente diferenciable en $y = 0$ ya que su derivada $2\,y^{-1/3}$ tiende a infinito allí. El teorema no nos asegura que el problema tenga solución única.

Existencia y unicidad

De hecho, $y(t) = t^3$ es solución ya que $y' = 3\,t^2$ y entonces

$$y' = 3\,y^{2/3} = 3\,t^2$$

y la condición inicial es

$$y(0) = 0^3 = 0$$

Sin embargo, $y(t) = 0$ es solución también ya que $y' = 0$ y entonces

$$y' = 3\,y^{2/3} = 0$$

y la condición inicial se satisface también.

Observación

Las funciones lineales son continuamente diferenciables en todo su dominio. Por lo tanto, toda ecuación diferencial lineal tiene solución única.

Las condiciones de existencia y unicidad son más difíciles para los PVF, en comparación con los PVI.

Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Comencemos con una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes:

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = h(t) \tag{2}$$

Si $h(t) = 0$ entonces la ecuación diferencial es homogénea.

Comencemos resolviendo la ecuación homogénea de (2).

Vamos a proponer un guess:

$$y = C\,e^{r\,t}$$

Entonces

$$y' = r\,C\,e^{r\,t}, \quad y'' = r^2\,C\,e^{r\,t}$$

Reemplazando el guess en la ecuación diferencial

$$a\,r^2\,C\,e^{r\,t} + b\,r\,C\,e^{r\,t} + c\,C\,e^{r\,t} = 0$$

$$C\,e^{r\,t}(a\,r^2 + b\,r + c) = 0$$

Como $C\,e^{r\,t} \neq 0$ entonces

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \tag{3}$$

Esta ecuación es la ecuación característica de la ecuación diferencial.

Acá se abren tres casos:

1. Las dos raíces son reales y distintas: $b^2 - 4\,a\,c > 0$.
2. Las dos raíces son reales e iguales: $b^2 - 4\,a\,c = 0$.
3. Las dos raíces son complejas y conjugadas: $b^2 - 4\,a\,c < 0$.

Raíces reales y distintas

En este caso la solución general es

$$y(t) = C_1\, e^{r_1\, t} + C_2\, e^{r_2\, t} \tag{4}$$

Demostración: Tanto r_1 como r_2 son raíces de la ecuación característica, y por lo tanto, $y_1(t) = C_1\, e^{r_1\, t}$ e $y_2(t) = C_2\, e^{r_2\, t}$ son soluciones de la ecuación diferencial. Como la ecuación diferencial es lineal, la suma de ambas soluciones es también solución. Para ver esto reemplacemos la suma en la ecuación diferencial y veamos que la satisface:

$$a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0} + \underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0} = 0$$

Ya mostramos que $y(t) = C_1\, e^{r_1\, t} + C_2\, e^{r_2\, t}$ es solución de la ecuación diferencial. Ahora mostremos que verifica las condiciones iniciales

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = z_0$$

y por lo tanto es solución general.

$$y(t_0) = C_1\, e^{r_1\, t_0} + C_2\, e^{r_2\, t_0} = y_0$$

$$y'(t_0) = r_1\, C_1\, e^{r_1\, t_0} + r_2\, C_2\, e^{r_2\, t_0} = z_0$$

Raíces reales y distintas

En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

La matriz Wronskiana $\mathbf{W}$ tiene rango completo igual a 2 ya que si se saca factor común $e^{r_1 t_0}\ e^{r_2 t_0}$ queda

$$|\mathbf{W}| = e^{r_1 t_0}\ e^{r_2 t_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Esto muestra que dados los valores iniciales, siempre se pueden encontrar C_1 y C_2 tales que (4) satisfaga esas condiciones iniciales. Por lo tanto, (4) es la solución general □

Raíces reales e iguales

Si las raíces son iguales $r_1 = r_2$ entonces la solución general es

$$y(t) = C_1\, e^{r_1\, t} + C_2\, t\, e^{r_1\, t} \tag{5}$$

Demostración: La ecuación característica tiene una raíz doble, $r_1 = -b/2a$. Entonces tenemos una solución $y_1(t) = C_1\, e^{r_1\, t}$, pero necesitamos otra que sea linealmente independiente. Proponemos un guess:

$$y_2(t) = C_2\, t\, e^{r_1\, t}$$

Para verificar que es solución reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(r_1^2\, C_2\, t\, e^{r_1\, t} + 2\, C_2\, r_1\, e^{r_1\, t}) + b(r_1\, C_2\, t\, e^{r_1\, t} + C_2\, e^{r_1\, t}) + c(C_2\, t\, e^{r_1\, t}) \\ &= C_2\, t\, e^{r_1\, t}(a\, r_1^2 + b\, r_1 + c) + C_2\, e^{r_1\, t}(2a\, r_1 + b) \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

Repitiendo el análisis para el caso anterior vemos que la siguiente matriz Wronskiana es regular

$$\mathbf{W} = e^{2\, r_1\, t_0} \begin{vmatrix} 1 & t_0 \\ r_1 & (1 + r_1\, t_0) \end{vmatrix}$$

y por lo tanto, (5) es solución general $\square$

Raíces complejas

Cuando las raíces son complejas[1] $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ la solución general es

$$y(t) = e^{\alpha\, t}\left(C_1\, \cos \beta t + C_2\, \operatorname{sen} \beta t\right) \tag{6}$$

Demostración: Como las raíces son distintas la demostración de que

$$y(t) = \tilde{C}_1\, e^{(\alpha+i\beta)t} + \tilde{C}_2\, e^{(\alpha-i\beta)t}$$

es solución es idéntica al caso 1. Vamos a trabajar la expresión para que no contenga números complejos.
Para ello vamos a usar la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t} &= e^{\alpha t} e^{i\beta t} \\ &= e^{\alpha t}\left(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t\right) \end{aligned}$$

[1] Siempre que hay raíces complejas vienen de a pares conjugados

Raíces complejas

$$\begin{aligned} e^{(\alpha - i\beta)t} &= e^{\alpha t} e^{-i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} \left(\cos -\beta t + i \operatorname{sen} -\beta t\right) \\ &= e^{\alpha t} \left(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t\right) \end{aligned}$$

La solución ahora es

$$\begin{aligned} y(t) &= \tilde{C}_1 e^{\alpha t} \left(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t\right) + \tilde{C}_2 e^{\alpha t} \left(\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t\right) \\ &= e^{\alpha t} \cos \beta t \underbrace{\left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2\right)}_{C_1} + e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \underbrace{\left(\tilde{C}_1 i - \tilde{C}_2 i\right)}_{C_2} \\ &= e^{\alpha t} \left(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t\right) \end{aligned}$$

Ahora calculemos el Wronskiano

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} e^0 \cos(0) & e^0 \operatorname{sen}(0) \\ e^{\alpha} \cos(\beta) & e^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^0 & 0 \\ e^{\alpha} \cos(\beta) & e^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta) \end{vmatrix} = e^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta) \neq 0$$

porque porque $\operatorname{sen}(\beta) = 0$ si $\beta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{N}_0$. Pero si $\operatorname{sen}(\beta) = 0$ entonces las raíces son reales, lo cual es falso por hipótesis $\square$

Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Estas soluciones se extienden al caso de ecuaciones diferenciales lineales y de orden superior a dos. La única diferencia es que la ecuación característica no va a ser una cuadrática, sino una ecuación polinómica de grado igual al orden de la ecuación diferencial.

En el caso en que haya raíces complejas iguales, que solo es posible cuando la ecuación diferencial es de cuarto orden o más, entonces se multiplica por t al segundo par de raíces complejas conjugadas.

Ejemplo 3:

$$y^{(iv)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$$

$$r^4 + 8r^3 + 24r^2 + 32r + 16 = 0$$

$$r_1 = -2$$

	1	8	24	32	16
-2		-2	-12	-24	-16
	1	6	12	8	0

$$r^3 + 6r^2 + 12r + 8 = 0$$

$$r_2 = -2$$

Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ -2 & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$r_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 4}}{2} = -2$$

La solución general es

$$y(t) = e^{-2t}\left(C_1 + C_2\, t + C_3\, t^2 + C_4\, t^3\right)$$

Ejemplo 4:

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

$$r^2 + 4r + 5 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 5}}{2} = -2 \pm i$$

La solución general es

$$y(t) = e^{-2t}(C_1\ \cos t + C_2\ \text{sen}\, t)$$

Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Antes de imponer las condiciones iniciales, derivamos:

$$y'(t) = -2e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t) + e^{-2t}(-C_1 \operatorname{sen} t + C_2 \cos t)$$

$$y'(t) = e^{-2t}\left[(C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\operatorname{sen} t\right]$$

Por las CI:

$$\begin{aligned} y(0) &= e^{-2\times 0}(C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0) = 1 \\ &= C_1 = 1 \\ y'(0) &= e^{-2\times 0}\left[(C_2 - 2C_1)\cos 0 - (C_1 + 2C_2)\operatorname{sen} 0\right] \\ &= C_2 - 2C_1 = 0 \\ &= C_2 - 2 = 0 \Rightarrow C_2 = 2 \end{aligned}$$

Entonces la solución del PVI es

$$y(t) = e^{-2t}(\cos t + 2 \operatorname{sen} t)$$

Solución de ecuaciones diferenciales lineales

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = h(t) \tag{2}$$

Para resolver ecuaciones diferenciales lineales completas (es decir, no homogéneas) como (2) hay que resolver la ecuación homogénea y sumarle una solución particular de la completa.

Demostración: Sea $y_p(t)$ una solución particular de la ecuación completa, y sea $C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ la solución general de la homogénea. Entonces vamos a mostrar que para cualquier solución $y^*(t)$ de (2) existen constantes C_1^* y C_2^* tales que

$$y^*(t) = C_1^* y_1(t) + C_2^* y_2(t) + y_p(t)$$

Como

$$a(y^* - y_p)'' + b(y^* - y_p)' + c(y^* - y_p) = (ay^{*\prime\prime} + by^{*'} + cy^*) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) = h(t) - h(t) = 0$$

Entonces $y^*(t) - y_p(t)$ es una solución de la ecuación homogénea. Mostramos que la resta de dos soluciones de la ecuación completa son solución de la homogénea, pero entonces eso implica que existen constantes C_1^* y C_2^* tales que

$$y^*(t) - y_p(t) = C_1^* y_1(t) + C_2^* y_2(t)$$

$$y^*(t) = C_1^* y_1(t) + C_2^* y_2(t) + y_p(t) \quad \square$$

Método de los coeficientes indeterminados

Para encontrar una solución particular de la completa se usa el método de los coeficientes indeterminados. Este método consiste en hacer un guess informado para la solución particular que sea una función similar a $h(t)$. Por ejemplo,

- si $h(t)$ es un polinomio de grado j entonces se ensaya un polinomio completo de grado j en t: $y_p(t) = \sum_{i=0}^{j} A_i t^j$.
- Si $h(t)$ es una función exponencial e^{rt} entonces se ensaya $y_p(t) = Ae^{rt}$.
- Si $h(t)$ es un múltiplo de $\operatorname{sen}(rt)$ o de $\cos(rt)$ entonces se ensaya $y_p(t) = A\operatorname{sen}(rt) + B\cos(rt)$.
- Si $h(t)$ es la suma de dos o más de las funciones indicadas entonces se ensaya la suma de las soluciones a ensayar para cada función, sin repetir términos semejantes.
- Si $h(t)$ es el producto de dos o más de las funciones indicadas entonces se ensaya el producto de las soluciones a ensayar para cada función, sin repetir términos semejantes.
- Si $h(t)$ contiene algún término que es solución de la ecuación homogénea asociada, correspondiendo a una raíz r con orden de multiplicidad m, entonces se multiplica por t^m la solución a ensayar que corresponde a ese término.

Método de los coeficientes indeterminados

Ejemplo 5:

$$y'' - y' - 2y = 4t^2$$

La solución de la ecuación homogénea es $y_h(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t}$
Para la solución particular de la completa ensayamos

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C$$

La vamos a reemplazar en la ecuación diferencial para despejar las constantes, pero antes necesitamos derivarla dos veces:

$$y_p'(t) = 2At + B$$

$$y_p''(t) = 2A$$

Ahora sí reemplazamos:

$$2A - (2At + B) - 2(At^2 + Bt + C) = 4t^2$$

$$(-2A)t^2 + (-2A - 2B)t + (2A - B - 2C) = 4t^2$$

$$\begin{cases} -2A = 4 \Rightarrow A = -2 \\ -2A - 2B = 0 \Rightarrow 4 - 2B = 0 \Rightarrow B = 2 \\ 2A - B - 2C = 0 \Rightarrow -4 - 2 - 2C = 0 \Rightarrow C = -3 \end{cases}$$

Entonces la solución general de la ecuación completa es

$$y(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t} - 2t^2 + 2t - 3$$

Método de los coeficientes indeterminados

Ejemplo 6:

$$y''' - 4y' = 3e^{2t}$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = C_1 + C_2\, e^{2t} + C_3\, e^{-2t}$$

Para la solución particular de la ecuación completa ensayamos

$$y_p(t) = Ate^{2t}$$

Derivamos tres veces:

$$y_p(t)' = Ae^{2t} + 2Ate^{2t} = (2t+1)Ae^{2t}$$
$$y_p(t)'' = 2Ae^{2t} + 2Ae^{2t} + 4Ate^{2t} = 4Ae^{2t} + 4Ate^{2t} = (4t+4)Ae^{2t}$$
$$y_p(t)''' = 8Ae^{2t} + 4Ae^{2t} + 8Ate^{2t} = 12Ae^{2t} + 8Ate^{2t} = (12+8t)Ae^{2t}$$

Y reemplazamos en la ecuación diferencial

$$(12+8t)Ae^{2t} - 4(2t+1)Ae^{2t} = 3e^{2t}$$
$$8Ae^{2t} = 3e^{2t} \Rightarrow A = \frac{3}{8}$$

Entonces la solución general de la ecuación completa es

$$y(t) = C_1 + C_2\, e^{2t} + C_3\, e^{-2t} + \frac{3}{8}\, t\, e^{2t}$$

Método de los coeficientes indeterminados

Ejemplo 7:

$$y'' + 2y' + y = 2\,\text{sen}(3t)$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = C_1\, e^{-t} + C_2\, t\, e^{-t}$$

Para la solución particular de la ecuación completa ensayamos

$$y_p(t) = A\ \text{sen}\,(3t) + B\ \cos(3t)$$

Derivamos dos veces $y_p(t)' = 3A\ \cos(3t) - 3B\ \text{sen}(3t)$

$$y_p(t)'' = -9A\ \text{sen}(3t) - 9B\ \cos(3t)$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial

$$-9A\ \text{sen}(3t) - 9B\ \cos(3t) + 6A\ \cos(3t) - 6B\ \text{sen}(3t) + A\ \text{sen}\,(3t) + B\ \cos(3t) = 2\,\text{sen}(3t)$$

$$(-8A - 6B)\ \text{sen}(3t) + (-8B + 6A)\ \cos(3t) = 2\,\text{sen}(3t)$$

$$\begin{cases} -8A - 6B = 2 \\ -8B + 6A = 0 \Rightarrow A = {}^{4}/_{3}B \end{cases}$$

$$-8\frac{4}{3}B - 6B = 2 \Rightarrow B = -\frac{3}{25} \Rightarrow A = -\frac{4}{25}$$

Método de los coeficientes indeterminados

Entonces la solución general de la ecuación completa es

$$y(t) = C_1\, e^{-t} + C_2\, t\, e^{-t} + -\frac{4}{25}\, \text{sen}(3t) - \frac{3}{25}\, \cos(3t)$$

Estabilidad de la solución

Definición

La solución general de la ecuación diferencial completa es asintóticamente estable sii la solución general de la ecuación homogénea tiende a cero cuando t tiende a infinito. Es decir,

$$\lim_{t \to \infty} y_h(t) = 0$$

Cuando esto no ocurre decimos que la solución es inestable.

Observación

Nótese que para que la solución de la ecuación completa sea estable se debe verificar la convergencia de la solución de la ecuación homogénea.

Observación

La estabilidad asintótica está vinculada con que la trayectoria de largo plazo no dependa de las condiciones iniciales, que están en la solución de la homogénea.
Cuando la solución general es asintóticamente estable, converge a la solución particular de la completa, que no depende de las condiciones iniciales.

Estabilidad de la solución

Teorema

La solución general de la ecuación diferencial es estable sii todas las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa.

Demostración: Vamos a analizar cada uno de los posibles casos.
1) Si todas las raíces de la ecuación característica son reales y diferentes entonces la solución tiene esta forma

$$y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n e^{r_n t}$$

Llamemos a la mayor de esas raíces r_1 y saquemos factor común

$$y_h(t) = e^{r_1 t} \left[C_1 + C_2 e^{(r_2 - r_1)t} + \cdots + C_n e^{(r_n - r_1)t} \right]$$

Lo que está entre corchetes tiende a C_1 cuando t tiende a infinito. Por otro lado,

- si $r_1 > 0$ entonces $\lim_{t \to \infty} y_h(t) = \infty$
- si $r_1 = 0$ entonces $\lim_{t \to \infty} y_h(t) = C_1$
- si $r_1 < 0$ entonces $\lim_{t \to \infty} y_h(t) = 0$

Solo en el último caso la solución es estable.

Estabilidad de la solución

2) Si hay m raíces iguales $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = r$ los términos correspondientes de la solución general son

$$\sum_{i=1}^{m} C_i t^{i-1} e^{rt}$$

Si $r \geq 0$ entonces esos términos tienden a infinito cuando t tiende a infinito.
Si $r < 0$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} C_1 e^{rt} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} C_2 t e^{rt} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_2 t}{e^{-rt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_2}{-re^{-rt}} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} C_3 t^2 e^{rt} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_3 t^2}{e^{-rt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2C_3 t}{-re^{-rt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2C_3}{r^2 e^{-rt}} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{t\to\infty} C_m t^{m-1} e^{rt} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_m t^{m-1}}{e^{-rt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(m-1)C_m t^{m-2}}{-re^{-rt}} = \cdots = \lim_{t\to\infty} \frac{(m-1)!C_m}{(-r)^{m-1} e^{-rt}} = 0$$

Por lo tanto, en el caso en que hay raíces reales y repetidas también es necesario y suficiente que las raíces sean negativas para que la solución sea estable.

Estabilidad de la solución

3) Si hay raíces complejas, para cada par de raíces complejas conjugadas la solución tiene la forma $y_h(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t\right)$
Como el seno y el coseno son funciones acotadas, en el límite $y_h(t)$ depende del término exponencial:

- si $\alpha > 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} y_h(t) = \infty$
- Si $\alpha = 0$ entonces el límite no existe.
- Si $\alpha < 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0$

4) Finalmente, si existen m pares de raíces complejas iguales entonces la solución tiene la forma

$$y_h(t) = e^{\alpha t} \sum_{i=1}^{m} t^{i-1}\left(C_{2i-1} \cos \beta t + C_{2i} \operatorname{sen} \beta t\right)$$

Si $\alpha \geq 0$ entonces $y_h(t)$ tiende a infinito cuando $t \to \infty$. Si $\alpha < 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0$ ya que el producto $e^{\alpha t} t^{i-1}$ tiende a cero (lo vimos en el caso de raíces reales iguales), y el término entre paréntesis está acotado $\square$

Diagrama de fase

Consideremos una ecuación diferencial de primer orden autónoma, no necesariamente lineal,

$$y' = f(y)$$

El diagrama de fase es el gráfico de $f(y)$ en (y, y'), y nos permite analizar cualitativamente la solución.

Ejemplo 8: $y' = y^3 - 7y^2 + 15y - 9$

El diagrama de fase es

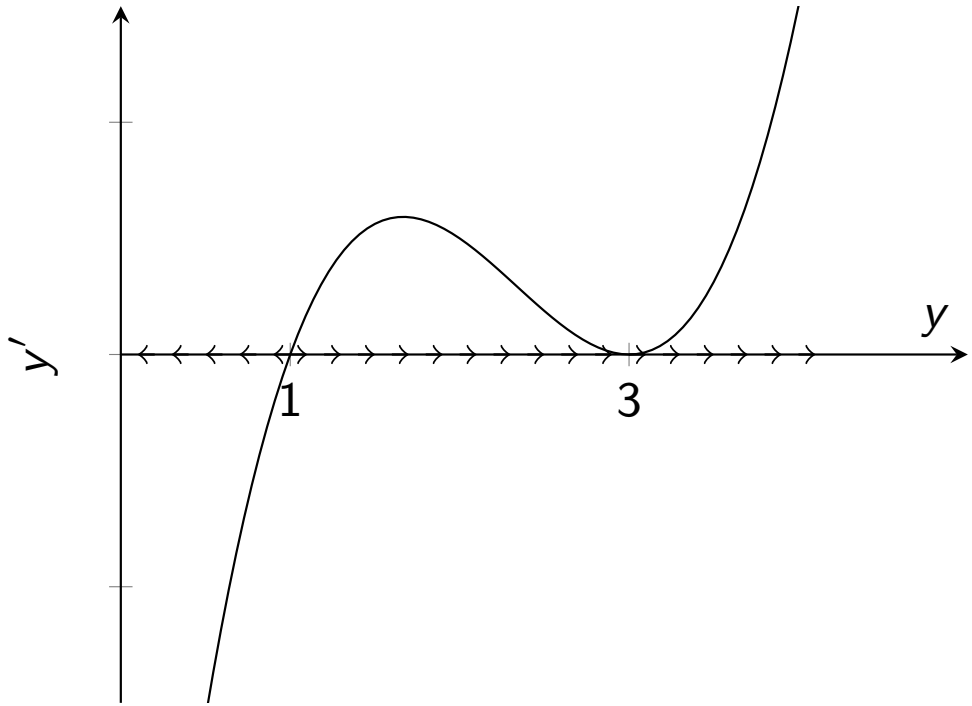


Diagrama de fase

Cuando $y' < 0$, y disminuye a medida que aumenta t; entonces las flechas se dibujan hacia la izquierda. Cuando $y' > 0$ sucede lo contrario.
Los equilibrios son puntos en los que $y' = 0$. En este ejemplo, $y = 1$ es inestable, y $y = 3$ es estable desde la izquierda e inestable desde la derecha (se considera inestable).
En general, una pendiente positiva de la línea de fase en su intersección con el eje horizontal indica que el equilibrio es inestable. Si la pendiente es negativa, el equilibrio es estable. Mientras que si la pendiente es cero, se debe analizar la pendiente en un entorno del punto de equilibrio.

Observación

Para ecuaciones diferenciales de primer orden lineales, este criterio de estabilidad a partir del diagrama de fase coincide con la demostración cuantitativa que exige que las raíces sean negativas.

Aplicación económica: Modelo de mercado con expectativas de precios

A veces los compradores y/o vendedores pueden ajustar su conducta de mercado no sólo en el precio corriente, sino también en su tendencia y aceleración. Por ejemplo, los compradores pueden demandar más de un producto cuando hay inflación para cubrirse contra un aumento futuro de precios. O los vendedores pueden ofertar menos del producto para guardar stock ante un aumento futuro del precio.
En tiempo continuo, la tendencia y la aceleración de los precios se expresa en la derivada primera y segunda del precio con respecto al tiempo.
El modelo en su forma más general es

$$\begin{cases} Q_d = a + bp + cp' + dp'' \\ Q_s = e + fp + gp' + hp'' \\ Q_s = Q_d \end{cases}$$

con $a, f > 0$ y $b, e < 0$.
La última ecuación de igualdad entre oferta y demanda permite igualar las dos primeras eucaciones del modelo, y obtener una ecuación diferencial de segundo orden lineal que puede ser resuelta con los métodos estudiados.
Ejemplo 9:

$$\begin{cases} Q_d = 9 - p + p' + 3p'' \\ Q_s = -1 + 4p - p' + 5p'' \\ Q_s = Q_d \end{cases}$$

Aplicación económica: Modelo de mercado con expectativas de precios

Igualando las dos primeras ecuaciones

$$2p'' - 2p' + 5p = 10$$

Esta ecuación tiene como solución general

$$p(t) = e^{t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)\right) + 2$$

Y si las condiciones iniciales son $p(0) = 4, p'(0) = 4$ entonces la solución particular es

$$p(t) = e^{t/2}\left(2\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)\right) + 2$$

Bibliografía

Bernardello, A., Bianco, M. J., Casparri, M. T., García Fronti, J. & Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática para Economistas con Excel y Matlab* [Cap. 4]. Omicron System.

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* [Caps. 15 y 16]. McGraw-Hill Education.

Simon, C. & Blume, L. (1994). *Mathematics for Economists* [Cap. 24]. Norton.

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x' - x - 2y = 0 \\ 4x - y' + 3y = 0 \end{cases}$$

Despejamos $y = (x' - x)/2$ de la primer ecuación y reemplazamos en la segunda

$$4x - \frac{1}{2}(x'' - x') + \frac{3}{2}(x' - x) = 0$$

$$-\frac{1}{2}x'' + 2x' + \frac{5}{2}x = 0$$

$$x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \Rightarrow x'(t) = 5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}$$

Reemplazando en la primera ecuación

$$y(t) = 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}$$

La solución general se suele escribir

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Proposición

Toda ecuación diferencial de segundo orden es equivalente a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

Demostración:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

Definimos $x(t) \equiv y'(t)$ y nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} ax'(t) + bx(t) + cy(t) &= g(t) \\ y'(t) - x(t) &= 0 \end{aligned}$$ □

Este mismo procedimiento también es válido para convertir una ecuación diferencial de orden n en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.
Por esta razón al estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales nos vamos a concentrar en aquellos que contengan ecuaciones diferenciales de primer orden.

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

Consideremos el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t) \end{aligned} \tag{1}$$

o escrito en notación matricial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y} \tag{1}$$

Proposición

Si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, entonces la solución al sistema de ecuaciones (1) es

$$\mathbf{y}(t) = C_1\,\mathbf{x}^1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathbf{x}^2\,e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n\,\mathbf{x}^n\,e^{\lambda_n t}$$

donde λ_i es un autovalor de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{x}^i$ su autovector asociado.

Demostración: Si $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal, es decir $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, entonces (1) es un sistema de n ecuaciones independientes entre sí $y_i' = a_{ii}y_i$ cuya solución es

$$y_1(t) = C_1e^{a_{11}t}, \cdots, y_n(t) = C_ne^{a_{nn}t}$$

Para este caso particular la proposición es verdadera, ya que como la matriz es diagonal, los a_{ii} son los autovalores y los autovectores son los canónicos.

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

Si $a_{ij} \neq 0$ para algún $i \neq j$ entonces podemos diagonalizar a la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$$

Consideremos el siguiente cambio de variables $\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{y}$. Derivando respecto a t y operando:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}' &= \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{y}' \\
&= \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{y} \qquad (\text{ porque } \mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{z} \qquad (\text{ porque } \mathbf{y} = \mathbf{P}\,\mathbf{z}) \\
&= \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{z}
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal, el sistema queda

$$\begin{aligned}
z_1' &= \lambda_1 z_1 \\
&\cdots\cdots \\
z_n' &= \lambda_n z_n
\end{aligned}$$

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

y su solución es

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ \cdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \cdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Finalmente usamos la transformación de variables para volver el sistema a las coordenadas originales:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{P}\,\mathbf{z}(t) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \cdots \mathbf{x}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \cdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}^1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}^2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} \mathbf{x}^n \quad \square \end{aligned}$$

Esta proposición también es válida cuando los autovalores son complejos.

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

Ejemplo 1 (cont.):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$P(-\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 + 3 - 4\lambda - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5$$

Los autovectores son

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces la solución general del sistema es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t}$$

que es igual a la que habíamos obtenido antes.

Observación

El polinomio característico es igual a la ecuación característica de la ecuación diferencial de segundo orden.

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 3x'(t) - y(t) = 0 \\ x(t) + 3y'(t) = 0 \end{cases}$$

La matriz **A** es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz son

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}i$$

y los autovectores son

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Entonces la solución general del sistema es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \tilde{C}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{1/3\, i\, t} + \tilde{C}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{-1/3\, i\, t}$$

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

y usando la fórmula de Euler $e^{1/3\, i\, t} = \cos(1/3\, t) + i\, \text{sen}(1/3\, t)$ y $e^{-1/3\, i\, t} = \cos(1/3\, t) - i\, \text{sen}(1/3\, t)$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \tilde{C}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} (\cos 1/3t + i\, \text{sen}\, 1/3t) + \tilde{C}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} (\cos(1/3\, t) - i\, \text{sen}(1/3\, t))$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \\ (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2)i \end{bmatrix} \cos(1/3\, t) + \begin{bmatrix} (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2)i \\ -\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \text{sen}(1/3\, t)$$

y renombrando las constantes $C_1 = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$, $C_2 = (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2)i$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \cos(1/3\, t) + \begin{bmatrix} C_2 \\ -C_1 \end{bmatrix} \text{sen}(1/3\, t)$$

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

A veces a la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$ se la llama matriz de operadores $\mathbf{G}(D)$ porque

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D & -1/3 \\ 1/3 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz escrita en función del operador derivada es igual a $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$ hasta una constante de multiplicidad. Y, por lo tanto $|\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}| = 0$ tiene las mismas raíces que $|\mathbf{G}(D)| = 0$.

Observación

Para fines prácticos es más conveniente usar la matriz de operadores $\mathbf{G}(D)$ ya que cuando el sistema tiene ecuaciones de orden mayor a 1 no hace falta añadir variables adicionales.

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

¿Qué ocurre cuando la matriz $\mathbf{A}$ no es diagonalizable?
Supongamos que el autovalor λ_i tiene orden de multiplicidad 2 pero un solo autovector asociado $\mathbf{x}^1$. Entonces se debe ensayar una segunda solución

$$C_2 \left(\mathbf{x}^1 \, t \, e^{\lambda_i \, t} + \mathbf{x}^2 \, e^{\lambda_i \, t} \right)$$

Sustituyendo esta nueva solución en (1) y despejando:

$$C_2(\mathbf{A}\,\mathbf{x}^1 - \lambda_i \, \mathbf{x}^1) t \, e^{\lambda_i \, t} + C_2(\mathbf{A}\,\mathbf{x}^2 - \lambda_i \, \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) e^{\lambda_i \, t} = 0$$

Como esta última expresión es válida para todo t, debe ocurrir que

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \, \mathbf{I})\mathbf{x}^1 = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \, \mathbf{I})\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1$$

El vector $\mathbf{x}^1$ ya lo tenemos. Para encontrar esta nueva solución solo hace falta resolver $\mathbf{x}^2$ de la segunda ecuación del sistema.

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} x' - x - 2y = 0 \\ y' + 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

El autovalor 3 está repetido dos veces, pero tiene un solo autovector

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para la solución que nos falta tenemos que resolver

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1/2 + x_1$$

Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1/2 \Rightarrow \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

La solución general es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t\, e^{3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} e^{3t} \right) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ t + 1/2 \end{bmatrix}$$

Resolución de sistemas homogéneos lineales por autovalores

Si λ_i fuese de multiplicidad 3 y un solo autovector asociado. Entonces se necesitan dos soluciones más:

$$C_2 \left(\mathbf{x}^1 \, t \, e^{\lambda_i \, t} + \mathbf{x}^2 \, e^{\lambda_i \, t} \right)$$

$$C_3 \left(\mathbf{x}^1 \, \frac{t^2}{2!} \, e^{\lambda_i \, t} + \mathbf{x}^2 \, t \, e^{\lambda_i \, t} + \mathbf{x}^3 \, e^{\lambda_i \, t} \right)$$

Que luego de reemplazar en (1) y despejar, nos queda el siguiente sistema para obtener los vectores de constantes:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \, \mathbf{I})\mathbf{x}^1 = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \, \mathbf{I})\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \, \mathbf{I})\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2$$

Los vectores $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ ya lo tenemos. Para encontrar esta nueva solución solo hace falta resolver $\mathbf{x}^3$ de la tercera ecuación del sistema.
Para el caso general, si λ_i tiene orden de multiplicidad m y un solo autovector asociado, se deben buscar $m - 1$ soluciones adicionales como lo hicimos, respetando esta forma:

$$C_m \left[\mathbf{x}^1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_i \, t} + \mathbf{x}^2 \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_i \, t} + \cdots + \mathbf{x}^{m-1} \, t \, e^{\lambda_i \, t} + \mathbf{x}^m \, e^{\lambda_i \, t} \right]$$

Resolución de sistemas lineales

Para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneos

$$\begin{aligned} y_1'(t) - a_{11}y_1(t) - \cdots - a_{1n}y_n(t) &= h_1(t) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(t) - a_{n1}y_1(t) - \cdots - a_{nn}y_n(t) &= h_n(t) \end{aligned} \tag{2}$$

o escrito en notación matricial

$$\mathbf{G}(D)\,\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}(t) \tag{2}$$

se usa el método de los coeficientes indeterminados.

- Si $\mathbf{H}(t)$ es un vector de constantes entonces se ensaya un vector de constantes $\mathbf{Y}_p(t) = \mathbf{A}$:

$$\mathbf{G}(D)\,\mathbf{A} = \mathbf{H}$$

$$\mathbf{G}(0)\,\mathbf{A} = \mathbf{H}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}(0)^{-1}\,\mathbf{H}$$

  es la solución particular del sistema completo, siempre que cero no sea raíz de la ecuación característica.

Resolución de sistemas lineales

- Si $\mathbf{H}(t)$ es un vector de funciones exponenciales $\mathbf{k}e^{bt}$ que tienen el mismo exponente b, entonces se ensaya $\mathbf{Y}_p(t) = \mathbf{A}\, e^{bt}$:

$$\mathbf{G}(D)\,\mathbf{A}\, e^{bt} = \mathbf{k}e^{bt}$$

$$\mathbf{G}(b)\,\mathbf{A}\, e^{bt} = \mathbf{k}e^{bt}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}(b)^{-1}\,\mathbf{k}$$

  y reemplazando las constantes en la solución

$$\mathbf{Y}_p(t) = \mathbf{G}(b)^{-1}\,\mathbf{k}\, e^{bt}$$

  se llega a la solución particular, siempre que b no sea raíz de la ecuación característica.
  Si $\mathbf{H}(t)$ es la suma de funciones exponenciales con distintos exponentes entonces se separa en términos con igual exponente y se encuentra la solución particular para cada uno de ellos.
- Si $\mathbf{H}(t)$ es una función seno o coseno con ángulo $\phi\, t$ entonces se plantea $\mathbf{Y}_p(t) = \mathbf{A_1}\ \mathrm{sen}\,(\phi\, t) + \mathbf{A_2}\ \cos(\phi\, t)$ y se despejan los vectores de constantes.

Resolución de sistemas lineales

- Si $\mathbf{H}(t)$ es un polinomio de grado n entonces se ensaya $\mathbf{Y}_p(t) = \mathbf{A}\, t^n + \mathbf{B}\, t^{n-1} + \cdots + \mathbf{M}\, t + \mathbf{N}$ y se despejan las constantes.

Si en algún caso la solución a ensayar ya es solución de la homogénea, se debe multiplicar la solución por un vector de polinomios completo, del grado que haga falta para romper la dependencia lineal.

Ejemplo 4:

$$\begin{cases} x' = x + y - z + 2e^{-t} \\ y' = 2x + 2y + z + 3 \\ z' = 2x - y + 4z + e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} D-1 & -1 & 1 \\ -2 & D-2 & -1 \\ -2 & 1 & D-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es

$$(D-1)(D^2 - 6D + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 1 \\ D_{2,3} = 3 \end{cases}$$

Para la raíz 1 el vector propio asociado es $(-1, 1, 1)$.
Para la raíz 3 los dos vectores propios asociados son $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, -2)$.

Resolución de sistemas lineales

La solución de la ecuación homogénea es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}^h = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3t}$$

La solución particular de la completa es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}^p = [\mathbf{G}(-1)]^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + [\mathbf{G}(0)]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}^c = \begin{bmatrix} -9/8 \\ 5/8 \\ 3/8 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación completa es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} -9/8 \\ 5/8 \\ 3/8 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Diagramas de fase

Esta herramienta sirve para hacer análisis cualitativo de sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales autónomas.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y) \\ y'(t) &= g(x,y) \end{aligned} \tag{3}$$

En el diagrama de fase se grafican las trayectorias de x e y. ¿Cómo se construye?

1. Se grafican las curvas de demarcación $x' = 0$ y $y' = 0$.
   Si se conoce la forma funcional de $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ entonces se pueden graficar directamente. Si no se conocen entonces se puede aproximar el gráfico con las derivadas. Por el teorema de la función implícita:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x'=0} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{f'_x}{f'_y} \quad (f'_y \neq 0)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y'=0} = -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} = -\frac{g'_x}{g'_y} \quad (g'_y \neq 0)$$

Diagramas de fase

2. Se determina la dirección de x a ambos lados de la curva de demarcación $x' = 0$ a partir de la derivada
$$\frac{\partial x'}{\partial x} = f'_x$$
(Alternativamente puede usarse $\partial x'/\partial y = f'_y$)
3. Se determina la dirección de y a ambos lados de la curva de demarcación $y' = 0$ a partir de la derivada
$$\frac{\partial y'}{\partial y} = g'_y$$
(Alternativamente puede usarse $\partial y'/\partial x = g'_x$)
4. A partir de estos dos pasos previos se escriben los signos $+$ o $-$ que indican la trayectoria del sistema en cada una de las cuatro regiones.
5. Se grafican algunas trayectorias.

Diagramas de fase

Ejemplo 5: Supongamos que nos dan la siguiente información del sistema (3)

$$f'_x < 0, \quad f'_y > 0, \quad g'_x > 0, \quad g'_y < 0$$

$$-\frac{f'_x}{f'_y} > -\frac{g'_x}{g'_y} \text{ para todo } x, y$$

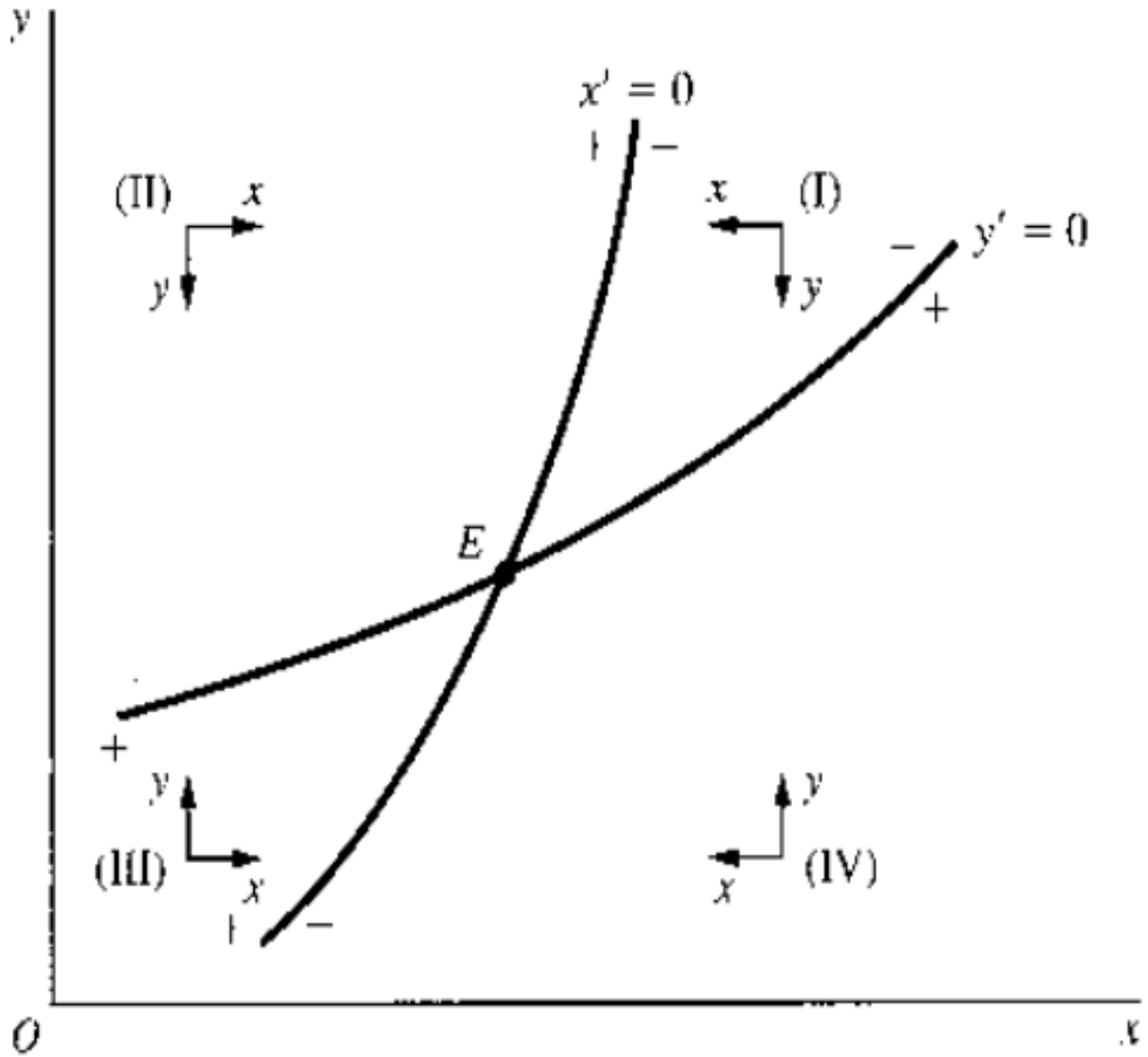
1. Las pendientes de las curvas de demarcación son positivas

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x'=0} = -\frac{f'_x}{f'_y} > 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y'=0} = -\frac{g'_x}{g'_y} > 0$$

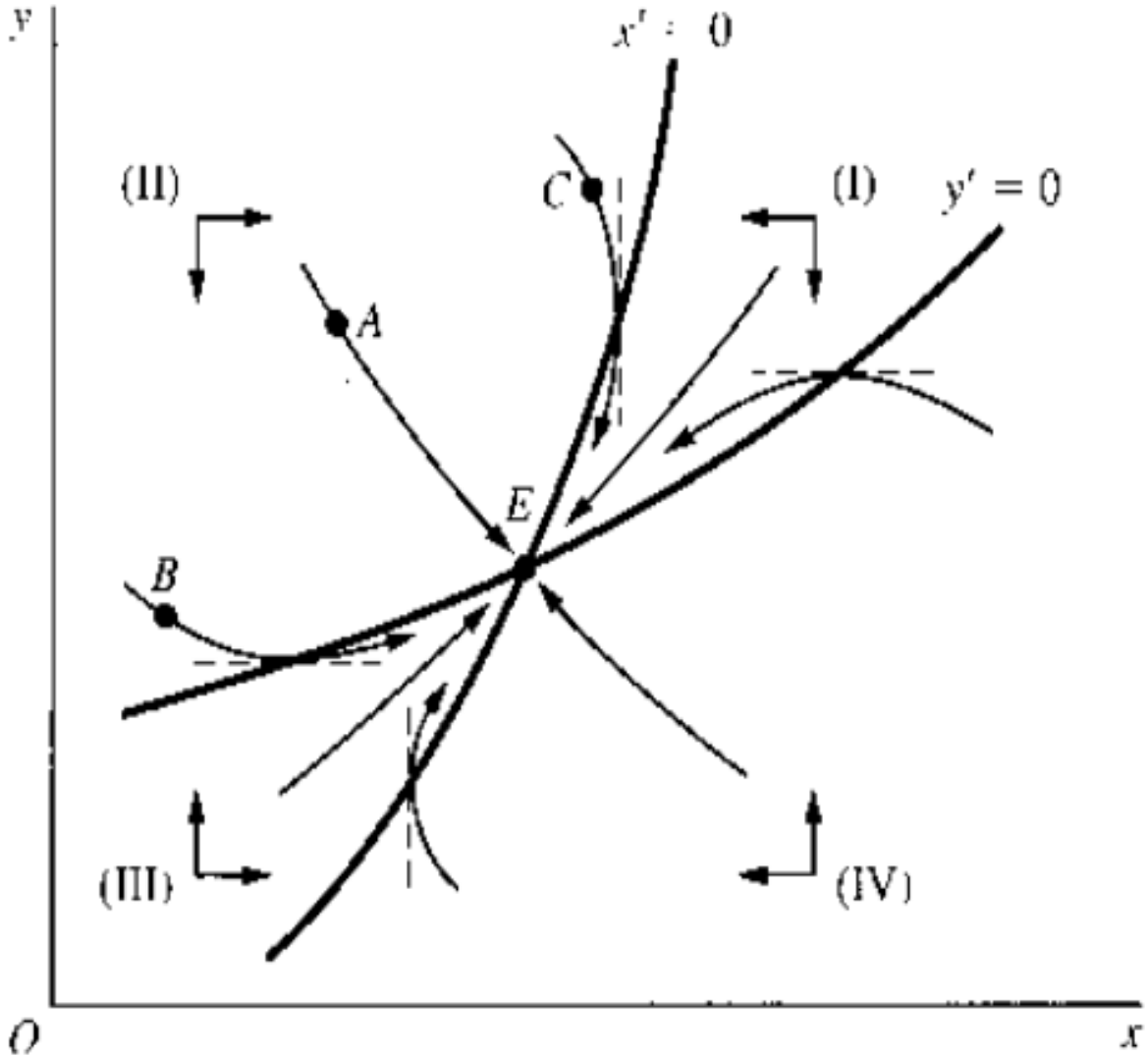
   Pero la pendiente de $x' = 0$ es más empinada que la de $y' = 0$.
2. $\frac{\partial x'}{\partial x} = f'_x < 0$
   Entonces x decrece de izquierda a derecha o, alternativamente, $\frac{\partial x'}{\partial y} = f'_y > 0$ entonces x crece de abajo hacia arriba.
3. $\frac{\partial y'}{\partial x} = g'_x > 0$
   Entonces y crece de izquierda a derecha o, alternativamente $\frac{\partial y'}{\partial y} = g'_y < 0$ entonces y decrece de abajo hacia arriba.

Diagramas de fase



Fuente: Chiang y Wainwright (2005) pág.616.

Diagramas de fase



Fuente: Chiang y Wainwright (2005) pág.618.

Todas las trayectorias convergen al punto E, lo que lo convierte en un equilibrio estable.

Diagramas de fase

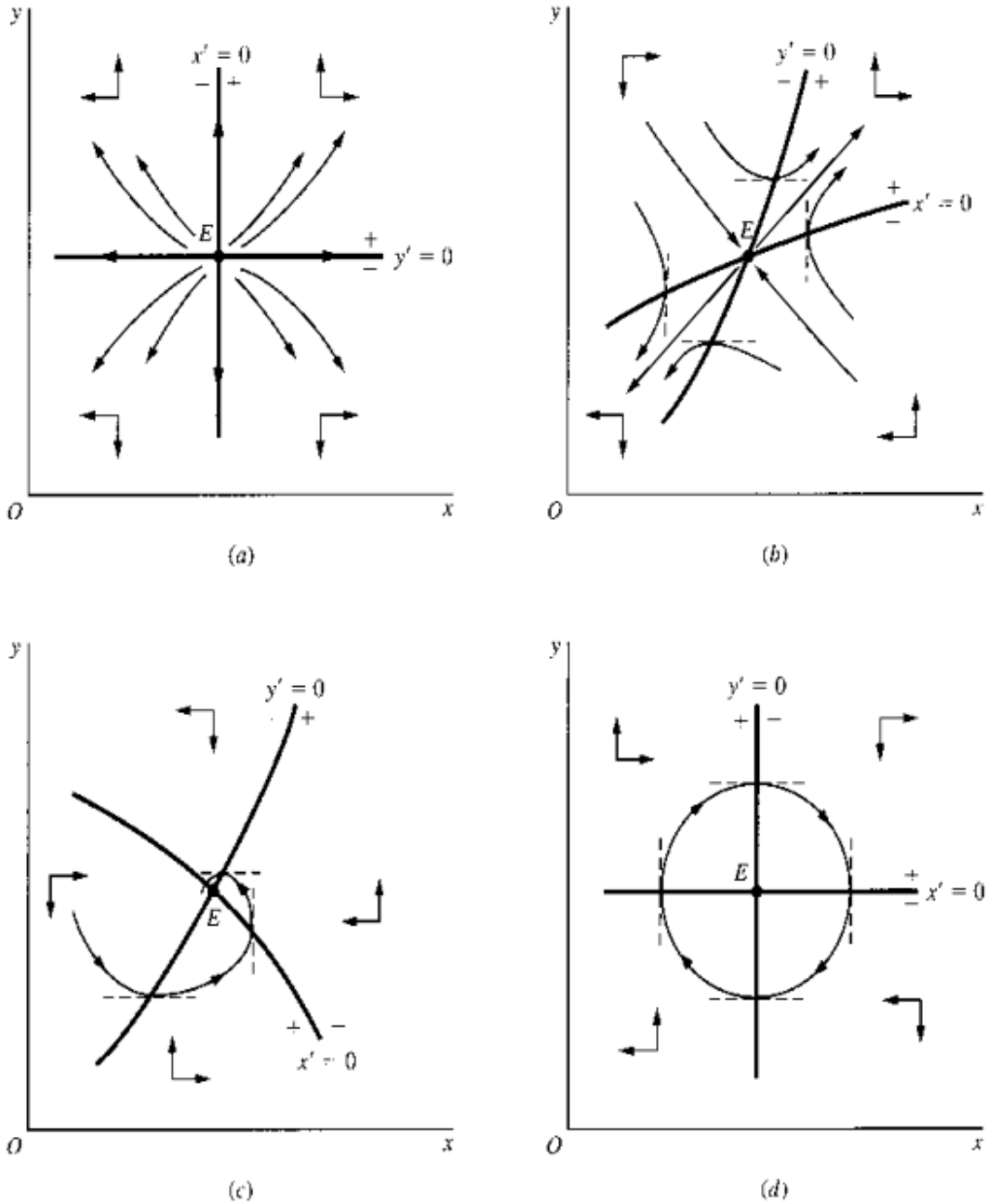
Observación

El diagrama de fase no nos da información acerca de qué tan rápido se llega a ese equilibrio, porque la variable t no está explícitamente graficada. Sin embargo, a medida que la trayectoria se acerque a la curva $x' = 0$ (o $y' = 0$) la velocidad de desplazamiento en sentido horizontal (vertical) debe disminuir progresivamente.

Existen cuatro tipos de equilibrio que pueden encontrarse cuando se hace un análisis cualitativo con un diagrama de fase:

1. Nodo: Cuando las trayectorias convergen (nodo estable) o divergen (nodo inestable) en forma no cíclica.
2. Foco: Cuando las trayectorias convergen (foco estable) o divergen (foco inestable) en forma cíclica.
3. Punto de silla: Cuando algunas trayectorias convergen al equilibrio pero otras divergen de él. Este equilibrio es inestable.
4. Vórtice: Cuando las trayectorias orbitan alrededor del equilibrio sin converger a él pero tampoco alejarse. Este equilibrio es inestable.

Diagramas de fase



Fuente: Chiang y Wainwright (2005) pág. 619.

Diagramas de fase

¿Cómo se relaciona esta tipología de equilibrios con la solución cuantitativa de sistemas lineales?

Un sistema de dos ecuaciones de primer orden lineal tiene dos raíces características λ_1 y λ_2.

- Si la parte real de las raíces es negativa, entonces la solución es estable.
  - Si las raíces son reales, entonces la solución es un nodo estable.
  - Si las raíces son complejas, entonces la solución es un foco estable.
- Si la parte real de las raíces es positiva o cero, entonces la solución es inestable
  - Si las raíces son reales, entonces la solución es un nodo inestable.
  - Si las raíces son complejas y la parte real es positiva, entonces la solución es un foco inestable.
  - Si las raíces son complejas y la parte real es cero, entonces la solución es un vórtice.
- Si una raíz es negativa y la otra es positiva o cero, entonces la solución es un punto de silla (inestable). Este tipo de equilibrio tiene un brazo estable, que corresponde a la raíz negativa.

Observación

Cuando el sistema de ecuaciones es lineal, la clasificación del equilibrio en base al diagrama de fase debe coincidir con la de sus autovalores.

Estabilidad local de sistemas no lineales

Un método alternativo para analizar la estabilidad de un sistema de ecuaciones no lineales consiste en linealizarlo en torno al equilibrio. Este método solo permite analizar estabilidad local.
Consideremos el punto de equilibrio $(\bar{x}, \bar{y})$ y la expansión de Taylor

$$x' \approx f(\bar{x}, \bar{y}) + f'_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + f'_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$
$$y' \approx g(\bar{x}, \bar{y}) + g'_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + g'_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x})$$

Como $f(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

$$x' \approx f'_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + f'_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$
$$y' \approx g'_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + g'_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x})$$

$$x' - f'_x(\bar{x}, \bar{y})x - f'_y(\bar{x}, \bar{y})y \approx -f'_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x} - f'_y(\bar{x}, \bar{y})\bar{y}$$
$$y' - g'_y(\bar{x}, \bar{y})y - g'_x(\bar{x}, \bar{y})x \approx -g'_y(\bar{x}, \bar{y})\bar{y} - g'_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x}$$

Podemos prescindir de los términos de la derecha ya que son constantes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{y})} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estabilidad local de sistemas no lineales

Este sistema lineal ya se puede resolver con los métodos estudiados. Las raíces características serán los valores λ_1, λ_2 que hacen que la ecuación característica sea cero:

$$\left| \begin{array}{cc} f'_x - \lambda & f'_y \\ g'_x & g'_y - \lambda \end{array} \right|_{(\bar{x},\bar{y})} = 0$$

¿La estabilidad del sistema linealizado coincide siempre con la del sistema no lineal? No. Cuando hay raíces con parte real nula y el resto de las raíces son negativas, la linealización no es informativa[1].
En resumen:

- Si todas las raíces del sistema lineal tienen parte real negativa, entonces la solución es localmente estable.
- Si al menos una raíz del sistema lineal tiene parte real positiva, entonces la solución es localmente inestable.
- Si al menos una raíz (o todas) tiene parte real nula y el resto son negativas, entonces no se puede concluir nada sobre la estabilidad local de la solución

[1] Teorema de Hartman-Grobman

Estabilidad local de sistemas no lineales

Ejemplo 6:

$$\begin{cases} x' = xy - 2 \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

El equilibrio ocurre cuando $x' = 0$ e $y' = 0$. De la segunda ecuación $y = 2x$, que reemplazado en la primera $2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 2$.
La jacobiana es

$$\begin{bmatrix} y & x \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Evaluada en $(1, 2)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son $1/2 \pm \sqrt{17}/2$. Por lo tanto, el equilibrio es un punto de silla, que es inestable.
En $(-1, -2)$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son $-3/2 \pm \sqrt{7}i$. El equilibrio es un foco estable.

Aplicación económica: Curva de Philips aumentada

El siguiente modelo vincula la curva de Philips (relación empírica inversa entre la tasa de desempleo y la tasa de inflación) con expectativas adaptativas de inflación.

$$\begin{cases} \pi = a - T - bU + \pi^e & a < 0, T > 0, b > 0 \\ \frac{d\pi^e}{dt} = j(\pi - \pi^e) & 0 < j \leq 1 \\ \frac{dU}{dt} = -k(m - \pi) & k > 0 \end{cases}$$

donde π es la tasa de inflación observada, π^e la tasa de inflación esperada, U la tasa de desempleo, T una constante que representa la variación en la productividad del trabajo, y m la tasa de crecimiento del stock nominal de dinero.

La primera ecuación determina la tasa de inflación a partir de la productividad del trabajo, la tasa de desempleo y las expectativas. A mayor productividad y/o mayor desempleo menor inflación, mientras que mayores expectativas aumentan la inflación.

La segunda ecuación es la ecuación que determina las expectativas de inflación a partir de la inflación actual. Si $j = 1$ las expectativas son racionales, mientras que si $j < 1$ las expectativas son adaptativas.

La tercera es la ecuación de movimiento de la tasa de desempleo. El desempleo depende negativamente de la brecha entre el crecimiento del stock nominal de dinero y la tasa de inflación. Esta ecuación es la que determina la curva de Philips a corto plazo: un aumento de la emisión por encima de la inflación reduce el salario real de los trabajadores, e incentiva a los empresarios a contratar más trabajdores, reduciendo así el desempleo.

Aplicación económica: Curva de Philips aumentada

Observación

Las dos últimas ecuaciones son diferenciales, mientras que la primera no. Por lo tanto, este es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

Reemplazamos la primera ecuación en las otras dos

$$\begin{cases} \frac{d\pi^e}{dt} = j(a - T - bU) \\ \frac{dU}{dt} = -k(m - a + T + bU - \pi^e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\pi^e}{dt} = j(a - T) - jbU \\ \frac{dU}{dt} = k\pi^e - kbU - k(m - a + T) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\pi^e}{dt} \\ \frac{dU}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -jb \\ k & -kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi^e \\ U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(a - T) \\ -k(m - a + T) \end{bmatrix}$$

Aplicación económica: Curva de Philips aumentada

Vamos a hacer el diagrama de fase del modelo.

$$\frac{d\pi^e}{dt} = 0 \Rightarrow -jbU + j(a - T) = 0 \Rightarrow U = \frac{a - T}{b}$$

La curva de demarcación de π^e es una línea vertical en el plano (U, π^e).

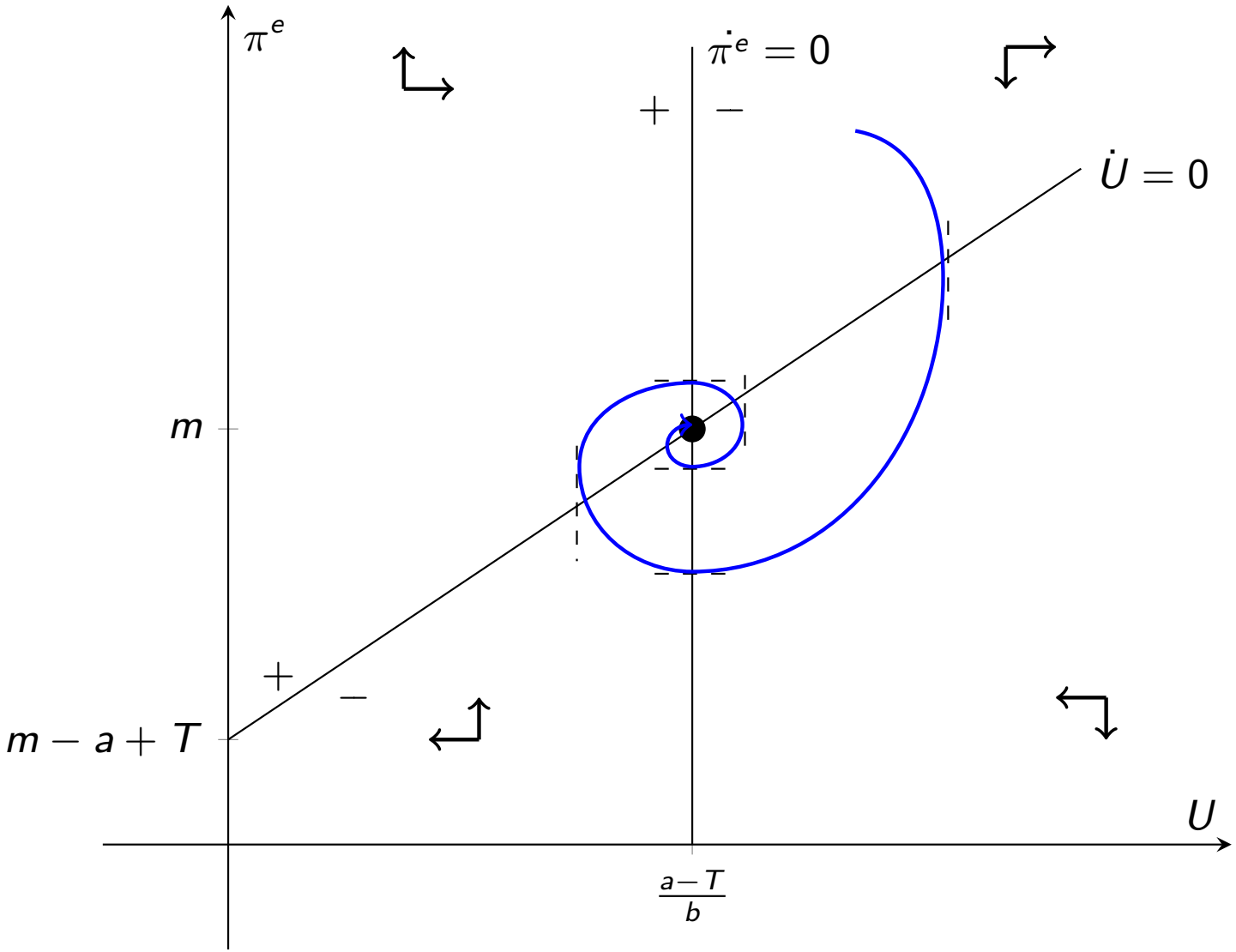
$$\frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow k\pi^e - kbU - k(m - a + T)$$

$$\pi^e = bU + m - a + T$$

$$\frac{\partial \dot{\pi^e}}{\partial U} = -jb < 0$$

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial U} = -kb < 0$$

Aplicación económica: Curva de Philips aumentada



El equilibrio es un foco estable.

Aplicación económica: Curva de Philips aumentada

Además de que el modelo es estable, y presenta oscilaciones al converger al equilibrio, se debe remarcar que la tasa de desempleo de equilibrio no depende de la inflación.
A su vez, la tasa de inflación de equilibrio solo depende del crecimiento del stock nominal de dinero.
Esto es lo que distingue a la curva de Philips cuando se ajusta por expectativas. Aunque en el corto plazo exista una relación inversa entre inflación y desempleo (la primera ecuación del modelo). En el largo plazo la tasa de desempleo está dada por factores estructurales, y la tasa de inflación depende solamente de factores monetarios.

Bibliografía

Bernardello, A., Bianco, M. J., Casparri, M. T., García Fronti, J. & Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática para Economistas con Excel y Matlab* [Cap. 4]. Omicron System.

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* [Caps. 19.5 y 19.6]. McGraw-Hill Education.

Simon, C. & Blume, L. (1994). *Mathematics for Economists* [Cap. 25]. Norton.

Control óptimo

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Optimización dinámica

En los problemas de optimización que vimos hasta ahora el objetivo era encontrar un valor para cada variable tal que la función objetivo resulte maximizada. Estos problemas eran *estáticos* ya que el tiempo no intervenía.

Por el contrario, en optimización dinámica vamos a contemplar un horizonte de planeamiento y buscar los valores para cada momento del tiempo que maximizan la función objetivo. El resultado no es un valor, sino muchos (infinitos), uno para cada momento del tiempo, es decir, una función del tiempo.

El problema canónico de optimización dinámica en tiempo continuo es el siguiente:

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(t, y(t), u(t))dt \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{c} \frac{dy(t)}{dt} \equiv y'(t) = g\left(t, y(t), u(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \\ y(t_1) = y_1 \\ u(t) \in U \quad \forall t \in [t_0, t_1] \end{array} \tag{1}$$

El objeto matemático que se quiere maximizar es una funcional, que transforma funciones en números. Para ello se debe encontrar la variable $u(t)$, que se denomina variable de control, que maximice dicho funcional. Pero la funcional también depende de $y(t)$, la variable de estado, que se ve alterada por $u(t)$ mediante la ecuación de movimiento $g(\cdot)$.

La variable de estado $y(t)$ constituye una descripción completa de la posición del sistema en el momento t, ya que incorpora la sucesión de todos los valores de la variable de estado y de control que ocurrieron hasta ese momento.

Optimización dinámica

Ejemplo 1: Un empresario debe decidir la política de inversión para los próximos 10 años. Su objetivo es maximizar los beneficios durante ese período, y pasar de tener un stock de capital de 10 a uno de 100.

$$\max_{I(t)} \int_0^{10} \pi(I(t), K(t))dt \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{r} \frac{dK(t)}{dt} \equiv K'(t) = I(t) \\ K(0) = 10 \\ K(10) = 100 \end{array}$$

Hay tres métodos para resolver estos problemas de optimización dinámica:

1. El cálculo de variaciones;
2. la teoría del control óptimo, y
3. la programación dinámica.

Para optimización dinámica en tiempo continuo vamos a estudiar control óptimo, y dejamos la programación dinámica para los problemas de optimización dinámica en tiempo discreto.

Control óptimo

El control óptimo es similar al método de los multiplicadores de Lagrange para optimización estática. En este caso las condiciones de primer orden se derivan del principio del máximo de Pontryagin.
Definimos la función Hamiltoniana

$$H(t, u, y, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t) g(t, y, u) \tag{2}$$

$\lambda(t)$ es la variable de coestado, y tiene una interpretación similar al multiplicador de Lagrange, sin embargo en este caso es una función en lugar de un escalar.

Principio del máximo

Las condiciones necesarias para un máximo local de (1) son:

1. $\max_{u(t)} H(t, u, y, \lambda)$
2. $y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$
3. $\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y}$

Control óptimo

Si $u(t)$ no está restringida entonces la primer condición se puede reemplazar por $H_u = 0$ y $H_{uu} < 0$.
La segunda condición reexpresa la ecuación de movimiento.
Las ecuaciones 2 y 3 forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Además, existe cierta simetría entre las dos condiciones.
$\lambda(t)$ es el valor de un incremento infinitesimal de $y(t)$ en t. Por lo tanto, representa un precio sombra como los multiplicadores de Lagrange en optimización estática restringida.

Teorema de suficiencia global de Mangasarian

Las condiciones de primer orden del principio del máximo son también suficientes para un máximo global de (1) si la función Hamiltoniana $H(t, u, y, \lambda^*)$ es cóncava en (u, y) para todo t.

Control óptimo

Ejemplo 2:

$$\max_{u(t)} \; -\int_0^1 u^2 dt \qquad \text{s. a} \begin{cases} y' = y + u \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

La función Hamiltoniana es

$$H = -u^2 + \lambda(y + u)$$

Por la primer condición del principio del máximo

$$H_u = -2u + \lambda = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2}\lambda$$

$$H_{uu} = -2 < 0 \Rightarrow \text{ Máximo}$$

Por la 3ra condición del principio del máximo

$$\lambda' = -H_y \Rightarrow \lambda' = -\lambda \Rightarrow \lambda' + \lambda = 0$$

$$\lambda(t) = C_1 e^{-t} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2} C_1 e^{-t}$$

Por la 2da condición del principio del máximo

$$y' = H_\lambda \Rightarrow y' = y + u \Rightarrow y' - y = {}^1\!/_2\, C_1 e^{-t}$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$y(t) = C_2 e^t - \frac{1}{4} C_1 e^{-t}$$

Control óptimo

Imponiendo las condiciones de borde

$$y(0) = C_2 - \frac{1}{4}C_1 = 1$$

$$y(1) = C_2 e - \frac{C_1}{4e} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{4e^2}$$

$$\frac{C_1}{4e^2} - \frac{1}{4}C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{4}{\frac{1}{e^2} - 1} = \frac{4e^2}{1 - e^2}$$

$$C_2 = \frac{1}{1 - e^2}$$

Las trayectorias son

$$y^*(t) = \frac{e^t}{1 - e^2} - \frac{e^{2-t}}{1 - e^2} = \frac{1}{1 - e^2}(e^t - e^{2-t})$$

$$\lambda^*(t) = \frac{4e^2}{1 - e^2}e^{-t} = \frac{4e^{2-t}}{1 - e^2}$$

$$u^*(t) = \frac{1}{2}\frac{4e^2}{1 - e^2}e^{-t} = \frac{2e^{2-t}}{1 - e^2}$$

Control óptimo

El Hamiltoniano es

$$H = -u^2 + \lambda(y + u)$$

cuyo Hessiano es

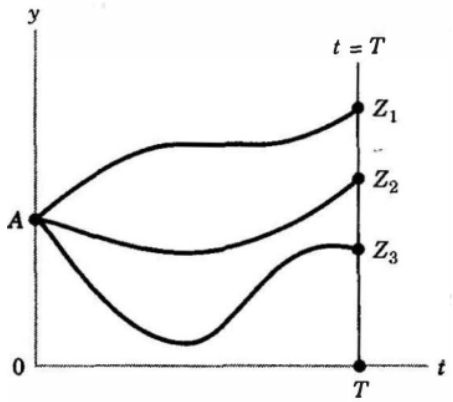
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \partial^2 H/\partial u^2 & \partial^2 H/(\partial u \partial y) \\ \partial^2 H/\partial u \partial y & \partial^2 H/\partial y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El Hessiano es semidefinido negativo, ya que los autovalores son -2 y 0.
Entonces, por el teorema de suficiencia de Mangasarian podemos asegurar que las trayectorias son un máximo global.

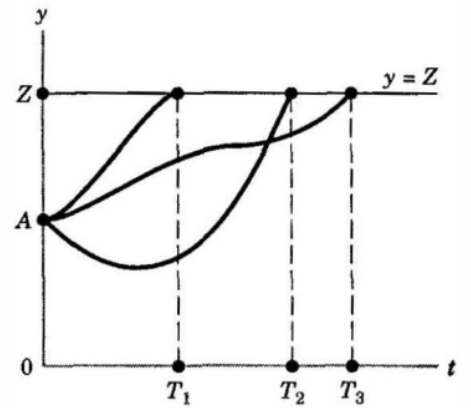
Condiciones de transversalidad

En algunos problemas no se especifica el valor de la variable de estado al momento final. Frente a esto, las distintas alternativas son:

1. Línea terminal vertical: se especifica el momento final t_1 pero se deja libre $y(t_1)$

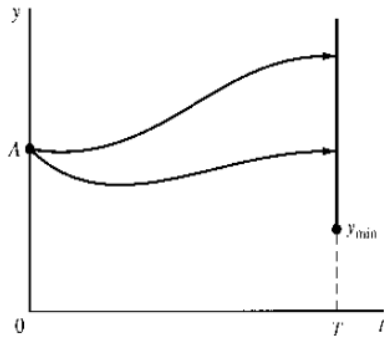


2. Línea terminal horizontal: se especifica el valor $y(t_1)$ pero se deja libre t_1

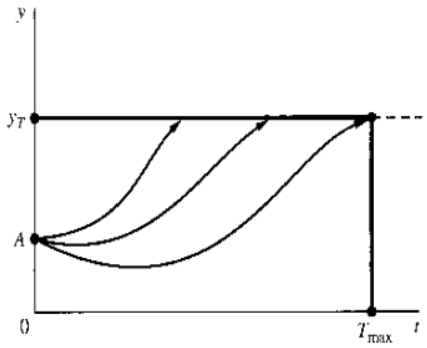


Condiciones de transversalidad

3. Línea terminal vertical truncada: como línea terminal vertical pero se agrega una restricción más: $y(t_1) \geq y_{\text{mín}}$



4. Línea terminal horizontal truncada: como línea terminal horizontal pero se agrega una restricción más: $t_1 \leq t_{\text{máx}}$



Condiciones de transversalidad

La condición de transversalidad en cada caso es:

1. $\lambda^*(t_1) = 0$
2. $H(t_1, u^*, y^*, \lambda^*) = H^*|_{t=t_1} = 0$
3. $\lambda^*(t_1) \geq 0, \quad y(t_1) \geq y_{\text{mín}}, \quad (y(t_1) - y_{\text{mín}})\,\lambda^*(t_1) = 0$
4. $H^*|_{t=t_1} \geq 0, \quad t_1 \leq t_{\text{máx}}, \quad (t_1 - t_{\text{máx}})\,H^*|_{t=t_1} = 0$

Las condiciones de transversalidad constituyen, junto con las condiciones del principio del máximo, condiciones necesarias para la existencia de un máximo local.

Aclaración

El teorema de suficiencia de Mangasarian solo se puede usar cuando el problema tiene especificadas las condiciones de borde o es de línea terminal vertical. No se puede usar en problemas de línea terminal horizontal.

Control óptimo

Ejemplo 3:

$$\max_{u(t)} \int_0^2 (y - u^2)dt \qquad \text{s. a} \begin{cases} y' = u \\ y(0) = 0 \\ y(2) \text{ libre} \end{cases}$$

$$H = y - u^2 + \lambda u$$

Por la 1ra condición del principio del máximo

$$H_u = -2u + \lambda = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2}\lambda$$

$$H_{uu} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Por la 3ra condición del principio del máximo

$$\lambda' = -H_y \Rightarrow \lambda' = -1 \Rightarrow \lambda(t) = -t + C_1$$

Como es un problema de línea terminal vertical

$$\lambda(2) = 0 \Rightarrow -2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$\lambda^*(t) = 2 - t$$

$$u^*(t) = 1 - \frac{1}{2}t$$

Control óptimo

Por la 2da condición del principio del máximo

$$y' = u \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{2}t \Rightarrow y(t) = t - \frac{1}{4}t^2 + C_2$$

Imponiendo la condición de borde

$$y(0) = C_2 = 0$$

Entonces las trayectorias son

$$u^*(t) = 1 - \frac{1}{2}t, \quad y^*(t) = t - \frac{1}{4}t^2, \quad \lambda^*(t) = 2 - t$$

El Hessiano del Hamiltoniano es

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \partial^2 H/\partial u^2 & \partial^2 H/(\partial u \partial y) \\ \partial^2 H/\partial u \partial y & \partial^2 H/\partial y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es semidefinido negativo. Por lo tanto, las trayectorias son un máximo global.

Control óptimo

Ejemplo 4:

$$\max_{u(t)} \; -\int_0^T (t^2 + u^2)dt \qquad \text{s. a} \begin{cases} y' = u \\ y(0) = 4 \\ y(T) = 5 \text{ con } T \text{ libre} \end{cases}$$

$$H = -(t^2 + u^2) + \lambda u$$

Por la 1ra condición del principio del máximo

$$H_u = -2u + \lambda = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2}\lambda$$

$$H_{uu} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Por la 3ra condición del principio del máximo

$$\lambda' = -H_y = 0 \Rightarrow \lambda(t) = C_1 \Rightarrow u = \frac{1}{2}C_1$$

Como es un problema de línea terminal horizontal

$$H|_T = 0 \Rightarrow -T^2 - \frac{1}{4}C_1^2 + C_1\frac{1}{2}C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 2T$$

Control óptimo

Por la 2da condición del principio del máximo

$$y' = u \Rightarrow y' = \frac{1}{2}C_1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}C_1 t + C_2$$

$$y(0) = 4 \Rightarrow C_2 = 4$$

$$y(T) = 5 \Rightarrow \frac{1}{2}C_1 T + C_2 = 5 \Rightarrow \frac{1}{2}C_1 T = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}2T\ T = 1 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow C_1 = 2$$

Las trayectorias óptimas son

$$y^*(t) = t + 4, \quad \lambda^*(t) = 2, \quad u^*(t) = 1, \quad T^* = 1$$

Control óptimo de problemas autónomos

El problema de control óptimo es autónomo cuando la variable t no está en la función objetivo ni en la ecuación de movimiento.

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(y(t), u(t))dt \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{r} \frac{dy(t)}{dt} \equiv y'(t) = g(y, u) \\ y(t_0) = y_0 \\ y(t_1) = y_1 \\ u(t) \in U \quad \forall t \in [t_0, t_1] \end{array}$$

En este tipo de problemas se puede hacer un análisis cualitativo con un diagrama de fase.

El Hamiltoniano a valor corriente

No obstante, existen otros problemas en los que el tiempo solo aparece en el factor de descuento en la función objetivo

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(y(t), u(t)) e^{-rt} dt \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{c} \frac{dy(t)}{dt} \equiv y'(t) = g(y, u) \\ y(t_0) = y_0 \\ y(t_1) = y_1 \\ u(t) \in U \quad \forall t \in [t_0, t_1] \end{array}$$

Si bien estos problemas no son autónomos, pueden "convertirse" si se emplea la función Hamiltoniana a valor corriente:

$$H_c \equiv H e^{rt} = F(y, u) + \mu\, g(y, u) \qquad \text{con } \mu \equiv \lambda e^{rt}$$

Las condiciones del principio del máximo cambian a

Principio del máximo con H_c

1. $\max_{u(t)} H_c(y, u, \mu)$
2. $y' = \frac{\partial H_c}{\partial \mu}$
3. $\mu' = -\frac{\partial H_c}{\partial y} + r\,\mu$

El Hamiltoniano a valor corriente

Demostración: La primera condición es maximizar $H(\cdot)$ para cada t. Pero como e^{rt} es constante para un t dado, esto también implica que la función $u(\cdot)$ que maximice $H(\dot{)}$ también maximizará $H_c(\cdot)$ para cada t.
La segunda condición es la ecuación de movimiento, y como $\frac{\partial H_c}{\partial \mu} = g(\cdot)$, entonces $y' = \frac{\partial H_c}{\partial \mu}$
Para la tercera condición vemos que $\lambda' = \mu' e^{-rt} - r\mu e^{-rt}$. Por otro lado, $\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H_c}{\partial y} e^{rt}$
Reemplazando en la tercera condición del principio del máximo

$$\mu' e^{-rt} - r\mu e^{-rt} = -\frac{\partial H_c}{\partial y} e^{rt}$$

$$\mu' = -\frac{\partial H_c}{\partial y} + r\mu$$

□

Problemas de tiempo infinito descontados

Ejemplo 5:

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} U(c)e^{-rt}dt \qquad \text{s. a} \begin{cases} k'(t) = \phi(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t) \\ k(0) = k_0 \\ 0 \leq c(t) \leq \phi(k(t)) \end{cases}$$

con $U'(c) > 0, U''(c) < 0, \phi'(k) > 0, \phi''(k) < 0, \lim_{k\to 0} \phi'(k) = \infty, \lim_{k\to\infty} \phi'(k) = 0$
El Hamiltoniano es

$$H = U(c)e^{-rt} + \lambda\left[\phi(k) - c - (n+\delta)k\right]$$

Observación

Maximizar H implica maximizar el retorno en el instante t dado por $U(c)e^{-rt}$ pero también el valor del incremento en el stock de capital en el momento t: $\lambda(t)\, k'(t)$.

y el Hamiltoniano a valor corriente es

$$H_c \equiv He^{rt} = U(c) + \mu\left[\phi(k) - c - (n+\delta)k\right]$$

Problemas de tiempo infinito descontados

Las condiciones del principio del máximo son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_c}{\partial c} &= U'(c) - \mu = 0 \Rightarrow \mu = U'(c) \\
k' &= \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = \phi(k) - c - (n+\delta)k \\
\mu' &= -\frac{\partial H_c}{\partial k} + r\mu = -\mu\left[\phi'(k) - (n+\delta)\right] + r\mu \\
&= -\mu\left[\phi'(k) - (n+\delta+r)\right]
\end{aligned}$$

La 2da y 3ra condición del principio del máximo forman un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo. Es más interesante que el sistema de ecuaciones sea en (k, c) en lugar de (k, μ).

Problemas de tiempo infinito descontados

Vamos a eliminar μ. Para ello

$$\mu' = U''(c)\, c'$$

Y sustituyendo μ y μ':

$$U''(c)\, c' = -U'(c)\left[\phi'(k) - (n + \delta + r)\right]$$

$$c' = -\frac{U'(c)}{U''(c)}\left[\phi'(k) - (n + \delta + r)\right] \qquad \text{(Ecuación de Euler)}$$

Ahora el sistema queda

$$k' = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = \phi(k) - c - (n + \delta)k$$

$$c' = -\frac{U'(c)}{U''(c)}\left[\phi'(k) - (n + \delta + r)\right]$$

Diagrama de fase

La curva de demarcación $k' = 0$ es

$$c = \phi(k) - (n + \delta)k$$

$$\frac{dc}{dk} = \phi'(k) - (n + \delta) \begin{array}{l} > 0 \text{ cuando } \phi'(k) > n + \delta \\ = 0 \text{ cuando } \phi'(k) = n + \delta \\ < 0 \text{ cuando } \phi'(k) < n + \delta \end{array}$$

Como $\phi''(k) < 0$, $k' = 0$ tiene pendiente positiva hasta el punto en que $\phi'(k) = n + \delta$ cuando tiene pendiente cero, y luego pendiente negativa.
Al k implícito definido por la ecuación $\phi'(k) - (n + \delta) = 0$ lo denominamos k^{GR}
La curva de demarcación $c' = 0$ es

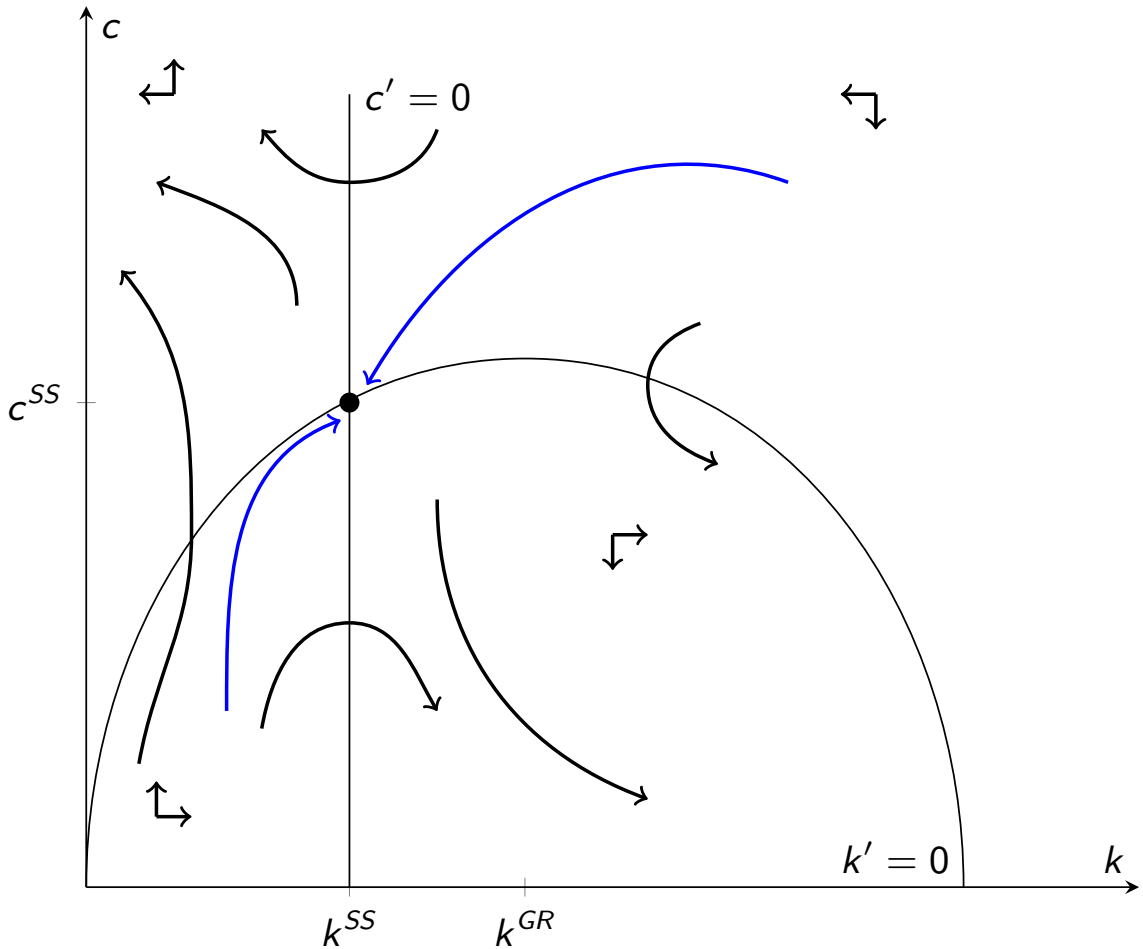
$$\phi'(k) - (n + \delta + r) = 0$$

que es independiente de c. Por lo tanto es una línea vertical en el plano (k, c).
Al k implícito definido por la ecuación $\phi'(k) - (n + \delta + r) = 0$ lo denominamos k^{SS}

Diagrama de fase

Para analizar las trayectorias tenemos que saber cómo se desplazan k y c en cada una de las regiones de demarcación

$$\frac{\partial k'}{\partial c} = -1 < 0, \qquad \frac{\partial c'}{\partial k} = -\frac{U'(c)}{U''(c)}\phi''(k) < 0$$



Condición de transversalidad

Para determinar en qué trayectoria va a estar la economía hay que obtener los valores de las constantes indeterminadas. Como son dos ecuaciones diferenciales de primer orden vamos a tener dos constantes indeterminadas. Pero tenemos una sola condición inicial $k(0) = k_0$, nos falta una condición más...
En realidad no. La otra condición que necesitamos es la condición de transversalidad, que en el caso de un problema de horizonte infinito, con factor de descuento y utilidad cóncava[†] es (Benveniste & Scheinkman, 1982)

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t)\, k(t) = 0 \tag{3}$$

Observación

Esta condición de transversalidad dice que el valor presente del stock de capital es cero en el largo plazo. Así, el consumidor no "sobreacumula" capital en el largo plazo.

Vamos a verificar que las trayectorias óptimas cumplen esta condición:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda^*(t)\, k^*(t) = \lim_{t \to \infty} U'(c^*) e^{-rt}\, k^*(t) = U'\left(c^{SS}\right)\, k^{SS} \lim_{t \to \infty} e^{-rt} = 0$$

Esta condición de transversalidad es necesaria, aunque con algunos supuestos adicionales también es suficiente...

Suficiencia

Teorema de suficiencia global

Dado un problema de control óptimo en tiempo infinito y con factor de descuento. Si (c^*, k^*, λ^*) cumplen las condiciones del principio del máximo, la condición de transversalidad (3), el Hamiltoniano a valor corriente es cóncavo en (c, k), y se verifica

$$\lim_{t \to \infty} \lambda^*(t)\, k(t) \geq 0$$

para cualquier trayectoria $k(t)$, entonces (c^*, k^*, λ^*) son un máximo global del problema de control.
Además, si el Hamiltoniano a valor corriente es estrictamente cóncavo en (c, k) entonces (c^*, k^*, λ^*) son un máximo global único.

Las condiciones del principio del máximo y de transversalidad ya las verificamos.
La Hessiana del Hamiltoniano a valor presente es

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} U''(c) & 0 \\ 0 & \mu^*\, \phi''(k) \end{bmatrix}$$

Como $U''(c) < 0$, $\mu^*(t) > 0$ y $\phi''(k) < 0$, la matriz Hessiana es definida negativa y el Hamiltoniano es estrictamente cóncavo.
Además, $\mu^*(t) > 0$ y $k(t) > 0$ por las restricciones del problema.
Por lo tanto, las trayectorias halladas son máximos globales únicos.

Bibliografía

Benveniste, L. & Scheinkman, J. (1982). Duality theory for dynamic optimization models of economics: The continuous time case. *Journal of Economic Theory*, *27*(1), 1-19.

Chiang, A. (1992). *Elements of Dynamic Optimization* [Caps. 8, 9 y 10]. McGraw-Hill Inc.

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* [Cap. 20]. McGraw-Hill Education.

Sydsæter, K., Hammond, P., Seierstad, A. & Strom, A. (2008). *Further Mathematics for Economic Analysis* [Cap. 9]. Financial Times Prentice Hall.

Ecuaciones en diferencias

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Diferencias finitas

Sea y_t una sucesión de valores $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ que están indexados por la variable t, que representa el tiempo en forma discreta.
Se define a la diferencia primera de y_t como

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

La diferencia segunda es

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta(y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - y_{t+1} - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - 2\,y_{t+1} + y_t$$

La diferencia tercera es

$$\Delta^3 y_t = \Delta(y_{t+2} - 2\,y_{t+1} + y_t) = y_{t+3} - 3\,y_{t+2} + 3\,y_{t+1} - y_t$$

y así sucesivamente.
Δ es un operador que aplicado a cualquier función de variable entera indica que debe restarse el valor de la función en ese período del valor en el siguiente período:
$\Delta f_t = f_{t+1} - f_t$.

Operadores

Como

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} k_i y_t^i = \sum_{i=1}^{n} k_i \Delta y_t^i$$

el operador diferencia es un operador lineal.
Además del operador diferencia existe otros operadores:

1. Operador desplazamiento E: $Ey_t = y_{t+1}$.
2. Operador identidad I: $Iy_t = y_t$.
3. Operador derivada D: $Dy(t) = y'(t)$. Que se relaciona con el operador desplazamiento $E = e^D$
4. Operador suma: $\sum = \Delta^{-1}$

Otra forma de escribir $\Delta = E - I$. Por lo tanto $\Delta^n = (E - I)^n$.

Ecuaciones en diferencias

Una ecuación en diferencias es una relación funcional del tipo

$$F(t, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \cdots, y_{t+k}) = 0 \tag{1}$$

que también puede escribirse a partir del operador diferencia:

$$F(t, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \cdots, \Delta^k y_t) = 0$$

Si la función y depende de dos o más variables independientes entonces se trata de una ecuación en diferencias parciales. De lo contrario se dice que la ecuación en diferencias es ordinaria.
El orden de una ecuación en diferencias está dado por la diferencia de mayor orden, o lo que es lo mismo, por la diferencia entre el mayor y el menor desplazamiento.
Si F está expresada en forma polinómica, entonces la ecuación en diferencias es lineal sii en cada uno de sus términos la función incógnita está elevada a la potencia unitaria.
Si $F(\cdot)$ no depende de t directamente, es decir, solo depende indirectamente a través de y y sus diferencias, entonces la ecuación en diferencias es autónoma.
A veces puede despejarse y_{t+k} de (1) y expresarla en forma normal:

$$y_{t+k} = f(t, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \cdots, y_{t+k-1})$$

Ecuaciones en diferencias

Ejemplo 1: El dinero y depositado en el banco en el momento t genera intereses mensuales a una tasa i:

$$y_{t+1} = y_t(1+i)$$

Por lo tanto en el momento $t = 1$:

$$y_1 = y_0(1+i)$$

En el momento $t = 2$:

$$y_2 = y_1(1+i) = y_0(1+i)^2$$

En el momento $t = 3$:

$$y_3 = y_2(1+i) = y_0(1+i)^3$$

Y para un momento génerico t:

$$y_t = y_0(1+i)^t$$

Esta es la solución general de esa ecuación en diferencias ya que contiene todas las posibles soluciones.
Como la función incógnita es una función que solo puede tomar números naturales ($t = 0, 1, 2, \cdots$) se trata de una *sucesión*.

Teorema

Consideremos el siguiente problema con valor inicial

$$y_{t+1} = f(t, y_t), \quad y_0 = y_0$$

donde $f(\cdot)$ es una función arbitraria. Entonces el PVI tiene solución única para todo $t \in \mathbb{N}$

Demostración: Dado y_0, $f(0, y_0)$ determina un único valor de y_1. Luego $f(1, y_1)$ determina un único valor de y_2. Luego $f(2, y_2)$ determina un único valor de y_3. Procediendo iterativamente quedan determinados todos los valores y_t que satisfacen el problema de valores iniciales $\square$

Observación

Las condiciones de existencia y unicidad para la solución de ecuaciones en diferencias son más fáciles que para ecuaciones diferenciales.

Solución de la ecuación homogénea

Para resolver una ecuación en diferencias homogénea con coeficientes constantes

$$a\, y_{t+2} + b\, y_{t+1} + c\, y_t = 0$$

se propone un guess

$$y_t = C\, r^t \Rightarrow \begin{cases} y_{t+1} = r\, C\, r^t \\ y_{t+2} = r^2\, C\, r^t \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación en diferencias y operando

$$C\, r^t \left(a r^2 + b r + c\right) = 0$$

Como $C\, r^t \neq 0$

$$a r^2 + b r + c = 0$$

Esta es la ecuación característica de la ecuación en diferencias.
Acá se abren tres casos:

1. Las dos raíces son reales y distintas: $b^2 - 4\, a\, c > 0$.
2. Las dos raíces son reales e iguales: $b^2 - 4\, a\, c = 0$.
3. Las dos raíces son complejas y conjugadas: $b^2 - 4\, a\, c < 0$.

Solución de la ecuación homogénea

1. Cuando las raíces son reales y distintas la solución es

$$y_t = C_1\, r_1^t + C_2\, r_2^t \tag{2}$$

Demostración: Llamemos $y_t^1 = C_1\, r_1^t$ y $y_t^2 = C_2\, r_2^t$. Reemplazando en la ecuación en diferencias

$$a\,(y_{t+2}^1+y_{t+2}^2)+b\,(y_{t+1}^1+y_{t+1}^2)+c\,(y_t^1+y_t^2) = \underbrace{a\,y_{t+2}^1 + b\,y_{t+1}^1 + c\,y_t^1}_{=0 \text{ porque } r_1 \text{ es raíz}} + \underbrace{a\,y_{t+2}^2 + b\,y_{t+1}^2 + c\,y_t^2}_{=0 \text{ porque } r_2 \text{ es raíz}}$$

Con esto mostramos que es solución. Ahora mostramos que es la solución general. Si imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{cases} C_1 r_1^0 + C_2 r_2^0 = y_0 \\ C_1 r_1^1 + C_2 r_2^1 = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Para que este sistema siempre tenga solución única distinta de la trivial, debe ser compatible determinado. El determinante de esta matriz se llama determinante de Casorati (es la versión discreta del Wronskiano)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_2 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$$

Solución de la ecuación homogénea

El determinante de Casorati tiene determinante distinto de cero, y esto muestra que siempre hay constantes C_1 y C_2 que permiten escribir la solución particular al PVI a partir de la solución de la homogénea $\square$

2. Cuando las raíces son reales e iguales la solución es

$$y(t) = C_1\, r^t + C_2\, t\, r^t \tag{3}$$

Demostración: En el caso anterior mostramos que $C_1 r^t$ era solución. Ahora mostremos que $C_2\, t\, r^t$ lo es. Reemplazando en la ecuación en diferencias

$$aC_2(t+2)r^{t+2} + bC_2(t+1)r^{t+1} + cC_2 t r^t = C_2 r^t \left[t \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} + \underbrace{r(2ar + b)}_{=0} \right]$$

Ahora mostremos que el determinante de Casorati es distinto de cero.

$$\begin{cases} C_1 r^0 + C_2 0 r^0 = y_0 \\ C_1 r^1 + C_2 r^1 = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & r \end{vmatrix} = r \neq 0 \text{ porque si } r = 0 \Rightarrow y_{t+2} = 0\ \forall t \quad \square$$

Solución de la ecuación homogénea

3. Cuando las raíces son complejas la solución es

$$y(t) = \tilde{C}_1 \ (\alpha + \beta\, i)^t + \tilde{C}_2 \ (\alpha - \beta\, i)^t \tag{4}$$

Demostración: La demostración de que (4) es solución es idéntica al caso 1.
Si escribimos los números complejos en forma polar

$$y(t) = \tilde{C}_1 \ [\rho\,(\cos\omega + i \cdot \operatorname{sen}\omega)]^t + \tilde{C}_2 \ [\rho\,(\cos\omega - i \cdot \operatorname{sen}\omega)]^t$$

donde $\omega \equiv \arctan\,(\beta/\alpha)$ y $\rho \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Además, por la fórmula de De Moivre

$$y(t) = \tilde{C}_1\, \rho^t\, (\cos\omega\, t + i \cdot \operatorname{sen}\omega\, t) + \tilde{C}_2\, \rho^t\, (\cos\omega\, t - i \cdot \operatorname{sen}\omega\, t)$$

Finalmente

$$y(t) = \rho^t\, (C_1\ \cos\omega\, t + C_2\ \operatorname{sen}\omega\, t) \tag{5}$$

donde $C_1 \equiv \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$ y $C_2 \equiv (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2)i$.
Mostremos que (5) es solución general. El determinante de Casorati es

$$\begin{vmatrix} \rho^0 \cos(0) & \rho^0 \operatorname{sen}(0) \\ \rho^1 \cos(\omega) & \rho^1 \operatorname{sen}(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \rho^1 \cos(\omega) & \rho^1 \operatorname{sen}(\omega) \end{vmatrix} = \rho \operatorname{sen}(\omega) \neq 0$$

porque $\operatorname{sen}(\omega) = 0$ sii $\omega = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{N}_0$. Pero si $\operatorname{sen}(\omega) = 0$ entonces las raíces son reales, lo cual es falso por hipótesis $\square$

Ecuaciones en diferencias homogéneas

Ejemplo 2:

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$$

La ecuación característica es

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = {}^5\!/_2 \pm {}^1\!/_2 \quad \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

Entonces, la solución general es

$$y_t = C_1\, 3^t + C_2\, 2^t$$

Ejemplo 3:

$$y_{t+2} + y_t = 0$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \omega = \arctan \infty = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Entonces, la solución general es

$$y_t = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\, t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\, t\right)$$

El guess en ecuaciones en diferencias y diferenciales

Observación

El guess que se usa para resolver ecuaciones diferenciales tiene que ver con el hecho de que

$$De^{r\,t} \text{ es proporcional a } e^{r\,t}$$

que luego de reemplazar en la ecuación diferencial permite sacar factor común y resolver la ecuación característica.
Similarmente, para ecuaciones en diferencias:

$$\Delta r^t \text{ es proporcional a } r^t$$

En cálculo infinitesimal e^x es la única función cuya derivada es igual a sí misma.
En cálculo discreto, 2^x es la única función cuya diferencia es igual a sí misma.

Solución de la ecuación completa

$$a\, y_{t+2} + b\, y_{t+1} + c\, y_t = h_t \tag{6}$$

Para resolver ecuaciones en diferencias lineales completas (es decir, no homogéneas) como (6) hay que resolver la ecuación homogénea y sumarle una solución particular de la completa.
Para encontrar una solución particular de la completa se usa el método de los coeficientes indeterminados.

Método de los coeficientes indeterminados

- Si h_t es un polinomio en t de grado p entonces se ensaya un polinomio completo de ese grado: $y_t^p = \sum_{i=1}^{p} A_i \, t^i$
- Si h_t es una función exponencial K^t entonces se ensaya $y_t^p = A \, K^t$
- Si h_t es una función $\text{sen}\,(\phi \, t)$ o $\cos(\phi \, t)$ entonces se ensaya $y_t^p = (A_1 \ \text{sen}\,(\phi \, t) + A_2 \ \cos(\phi \, t))$
- Si h_t contiene algún término que es solución de la ecuación homogénea asociada a (6), correspondiendo a una raíz r con orden de multiplicidad m, entonces se multiplica por t^m la solución a ensayar que corresponde a ese término.
- Si h_t es la suma de dos o más de las funciones indicadas, entonces se ensaya la suma de las soluciones a ensayar, sin repetir términos semejantes.
- Si h_t es el producto de dos o más de las funciones indicadas, entonces se ensaya el producto de las soluciones a ensayar, sin repetir términos semejantes.

En todos los casos, las constantes A_i deben determinarse de forma que y_t^p satisfaga la ecuación completa para todos los valores de t.

Ecuaciones en diferencias completas

Ejemplo 4:

$$y_{t+3} - y_{t+2} - y_{t+1} + y_t = t2^t$$

La ecuación característica es

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = 1, r_3 = -1$$

La solución de la homogénea es

$$y_t^h = C_1 + C_2 t + C_3(-1)^t$$

Para la solución particular de la ecuación completa ensayamos

$$y_t^p = (At + B)2^t$$

$$y_{t+1}^p = A(t+1)2^{t+1} + B2^{t+1} = [2At + 2A + 2B]\,2^t$$
$$y_{t+2}^p = A(t+2)2^{t+2} + B2^{t+2} = [4At + 8A + 4B]\,2^t$$
$$y_{t+3}^p = A(t+3)2^{t+3} + B2^{t+3} = [8At + 24A + 8B]\,2^t$$

Reemplazando en la ecuación en diferencias

$$[8At + 24A + 8B]\,2^t - [4At + 8A + 4B]\,2^t - [2At + 2A + 2B]\,2^t + \left[(At + B)2^t\right] = t2^t$$

Ecuaciones en diferencias completas

$$[3At + (14A + 3B)]\,2^t = t2^t \Rightarrow \begin{cases} 3A = 1 \Rightarrow A = {}^1\!/_3 \\ 14A + 3B = 0 \Rightarrow {}^{14}\!/_3 + 3B = 0 \Rightarrow B = -{}^{14}\!/_9 \end{cases}$$

La solución general es

$$y_t = C_1 + C_2 t + C_3(-1)^t + ({}^1\!/_3 t - {}^{14}\!/_9)2^t$$

Ecuaciones en diferencias completas

Ejemplo 5:

$$y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = (2t+1)\,3^t$$

La solución de la homogénea es

$$y_t^h = C_1 3^t + C_2(-2)^t$$

Para la solución particular de la ecuación completa ensayamos

$$y_t^p = (At^2 + Bt)3^t = At^2 3^t + Bt3^t$$

$$\begin{aligned}
y_{t+1}^p &= (A(t+1)^2 + B(t+1))3^{t+1} \\
&= A[t^2 + 2t + 1]3^{t+1} + B(t+1)3^{t+1} \\
&= [3A(t^2 + 2t + 1) + 3B(t+1)]3^t \\
&= [3At^2 + (6A + 3B)t + (3A + 3B)]3^t \\
y_{t+2}^p &= A(t+2)^2 3^{t+2} + B(t+2)3^{t+2} \\
&= A(t^2 + 4t + 4)3^{t+2} + B(t+2)3^{t+2} \\
&= [9A(t^2 + 4t + 4) + 9B(t+2)]3^t \\
&= [9At^2 + (36A + 9B)t + (36A + 18B)]3^t
\end{aligned}$$

Ecuaciones en diferencias completas

Reemplazando en la ecuación en diferencias

$$[9At^2+(36A+9B)t+(36A+18B)]3^t-[3At^2+(6A+3B)t+(3A+3B)]3^t-6(At^2+Bt)3^t = [30At+(33A+15B)]3^t = (2t+1)3^t$$

Comparando coeficientes

$$\begin{cases} 30A = 2 \Rightarrow A = {}^1/_{15} \\ {}^{33}/_{15} + 15B = 1 \Rightarrow B = -{}^2/_{25} \end{cases}$$

La solución general es

$$y_t = ({}^1/_{15}t^2 - {}^2/_{25}t + C_1)3^t + C_2(-2)^t$$

Estabilidad de la solución

Teorema

La solución general de la ecuación en diferencias es estable sii todas las raíces tienen módulo menor a uno.

Demostración: Cuando las raíces (reales o complejas) son distintas, los términos de la solución de la homogénea tienen la siguiente forma

$$C_i \, r_i^t$$

que tienden a cero si y solo si $|r_i| < 1$.
Nótese que cuando se escribe el número complejo en forma polar y se usa la fórmula de De Moivre

$$y(t) = \rho^t \left(C_1 \, \cos \omega \, t + C_2 \, \text{sen} \, \omega \, t \right) \tag{5}$$

el módulo del número complejo es ρ, que está elevado a la t y multiplica a la suma de dos funciones trigonométricas que están acotadas.

Estabilidad de la solución

Por otro lado, cuando las raíces (reales o complejas) son repetidas, los términos de la solución de la homogénea tienen la siguiente forma

$$C_i \, t^j \, r_i^t, \qquad \text{con } j \in \mathbb{N}$$

donde j representa el orden de multiplicidad de la raíz r_i.
Estos términos también tienden a cero si y solo si $|r_i| < 1$ □

Diagrama de fase

Consideremos una ecuación en diferencias de primer orden autónoma, no necesariamente lineal

$$y_{t+1} = f(y_t)$$

El diagrama de fase es el gráfico de $f(y)$ en (y_t, y_{t+1}), junto con la bisectriz de 45 grados.
Ejemplo 6:

$$y_{t+1} = {}^1\!/_2 \cdot y_t^2 - 2$$

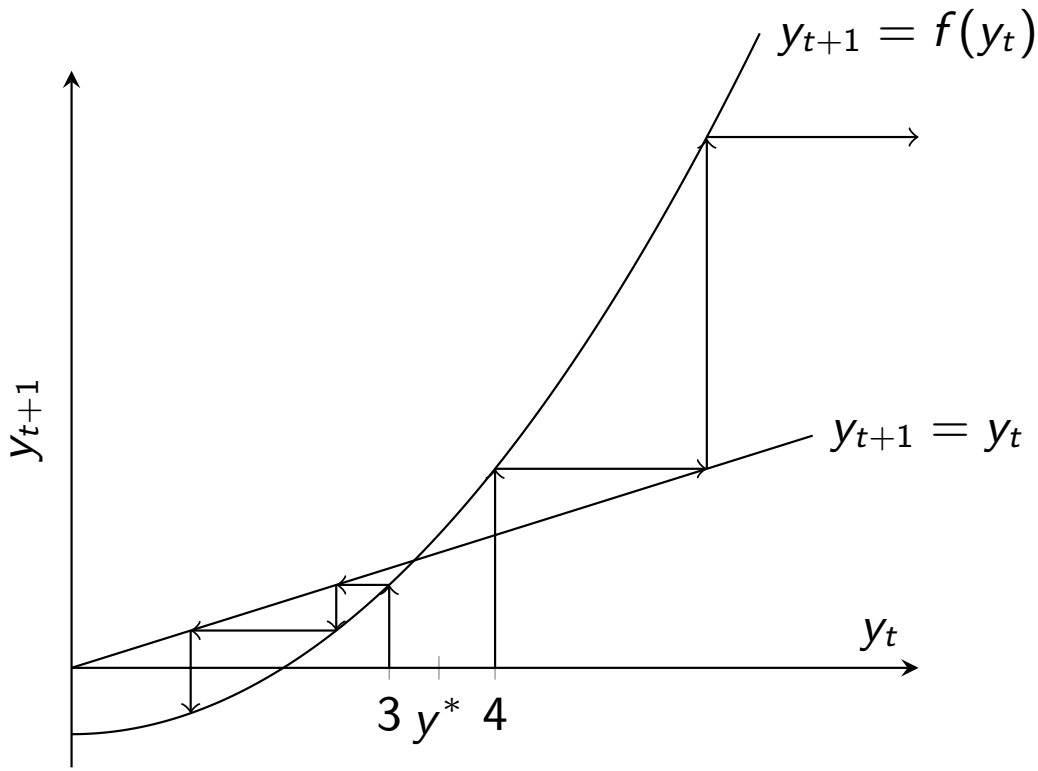


Diagrama de fase

Los puntos de equilibrio son puntos de intersección entre $f(y_t)$ y la bisectriz.
Si se comienza en $y_0 = 4$, entonces al período siguiente $y_1 = 6$. Para adelantar un período en el gráfico, la trayectoria rebota contra la bisectriz y vuelve a $f(y_t)$. En el período siguiente $y_2 = 16$, y así.
Por otro lado, si se comienza en $y_0 = 3$, entonces $y_1 = 2{,}5$, $y_2 = 1{,}125$, y así.
El equilibrio no es estable. Además, la divergencia del equilibrio es monótona, ya que la línea de fase es monótonamente creciente/decreciente (dependiendo del valor inicial).
La estabilidad del equilibrio depende de la pendiente de $f(y_t)$ en el equilibrio: cuando esta pendiente es > 1 el equilibrio es inestable, si es < 1 es estable, y si es $= 1$ no se puede concluir nada y debe analizarse la pendiente en un entorno del punto de equilibrio.
La monotonicidad u oscilatoriedad del equilibrio depende de que la pendiente de $f(y_t)$ sea positiva o negativa, respectivamente.

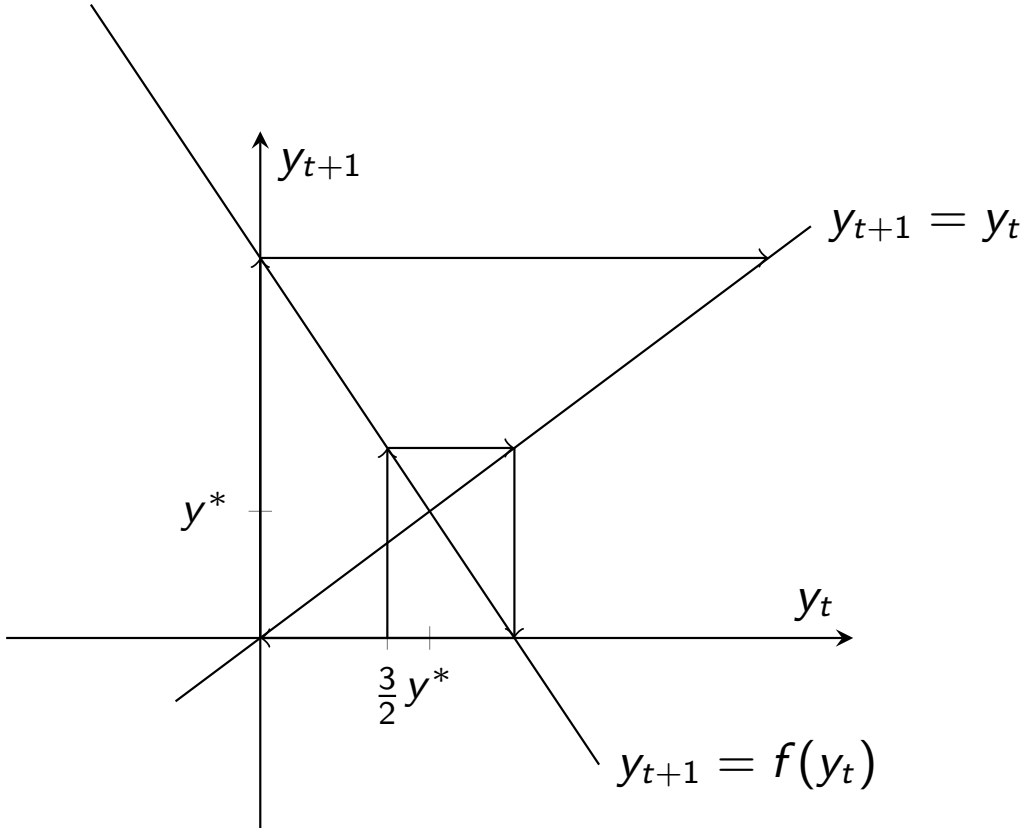
Diagrama de fase

¿Cómo se relaciona el diagrama de fase de una ecuación lineal con las soluciones analíticas estudiadas?

Ejemplo 7:

$$y_{t+1} = 6 - 2y_t$$

El equilibrio de esta ecuación es $y^* = 2$



El equilibrio es inestable y oscilatorio.

Diagrama de fase

La pendiente es $f'(y_t) = -2$ (que no depende de y_t porque la ecuación es lineal), lo que confirma la caracterización del equilibrio.
La solución analítica de esta ecuación es

$$y_t = C_1(-2)^t + 2$$

Podemos comparar la información del diagrama de fase con la solución analítica:

- El equilibrio es igual a la solución particular de la completa.
- La pendiente de $f(y_t)$ es igual a la raíz de la ecuación característica. En ecuaciones lineales, la estabilidad depende de que las raíces sean menores a 1 en valor absoluto. Esta misma condición se aplica a la pendiente de $f(y_t)$ en el equilibrio. La ventaja de analizar la pendiente de $f(y_t)$ es que también se puede aplicar a ecuaciones no lineales.
  En el caso en que $|f'(y_t)| = 1$ y la ecuación sea lineal entonces el equilibrio es inestable, pero si la ecuación no es lineal no se puede afirmar ni descartar la estabilidad.

Aplicación económica: Modelo de oferta y demanda

Considere el siguiente modelo

$$\begin{cases} Q_t^D = -aP_t + b \\ Q_t^S = cP_{t-1} - d \\ Q_t^D = Q_t^S \end{cases}$$

con $a, b, c, d > 0$, siendo $a > c$

Por la tercera ecuación, podemos igualar la primera y segunda:

$$-a\,P_t + b = c\,P_{t-1} - d$$

$$a\,P_{t+1} + c\,P_t = b + d$$

La ecuación homogénea tiene como solución

$$\left(\frac{-c}{a}\right)^t C_1$$

Para la solución particular de la completa ensayamos

$$P_t^p = A \Rightarrow P_{t+1}^p = A$$

Reemplazando en la ecuación en diferencias

$$(a + c)A = b + d \Rightarrow A = \frac{b + d}{a + c}$$

Aplicación económica: Modelo de oferta y demanda

La solución general es

$$P_t = C_1 \left(\frac{-c}{a}\right)^t + \frac{d+b}{a+c}$$

Vamos a hallar la solución particular dada la condición inicial

$$P_0 = C_1 + \frac{d+b}{a+c} \Rightarrow C_1 = P_0 - \frac{d+b}{a+c}$$

Entonces la solución particular es

$$P_t = \left(\frac{-c}{a}\right)^t \left(P_0 - \frac{d+b}{a+c}\right) + \frac{d+b}{a+c}$$

¿En este modelo cuál es el precio de equilibrio?
Podemos hacer $P_{t-1} = P_t$ en el sistema original

$$\begin{cases} Q_t^D = -aP^* + b \\ Q_t^S = cP^* - d \\ Q_t^D = Q_t^S \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q^* = -aP^* + b \\ Q^* = cP^* - d \end{cases}$$

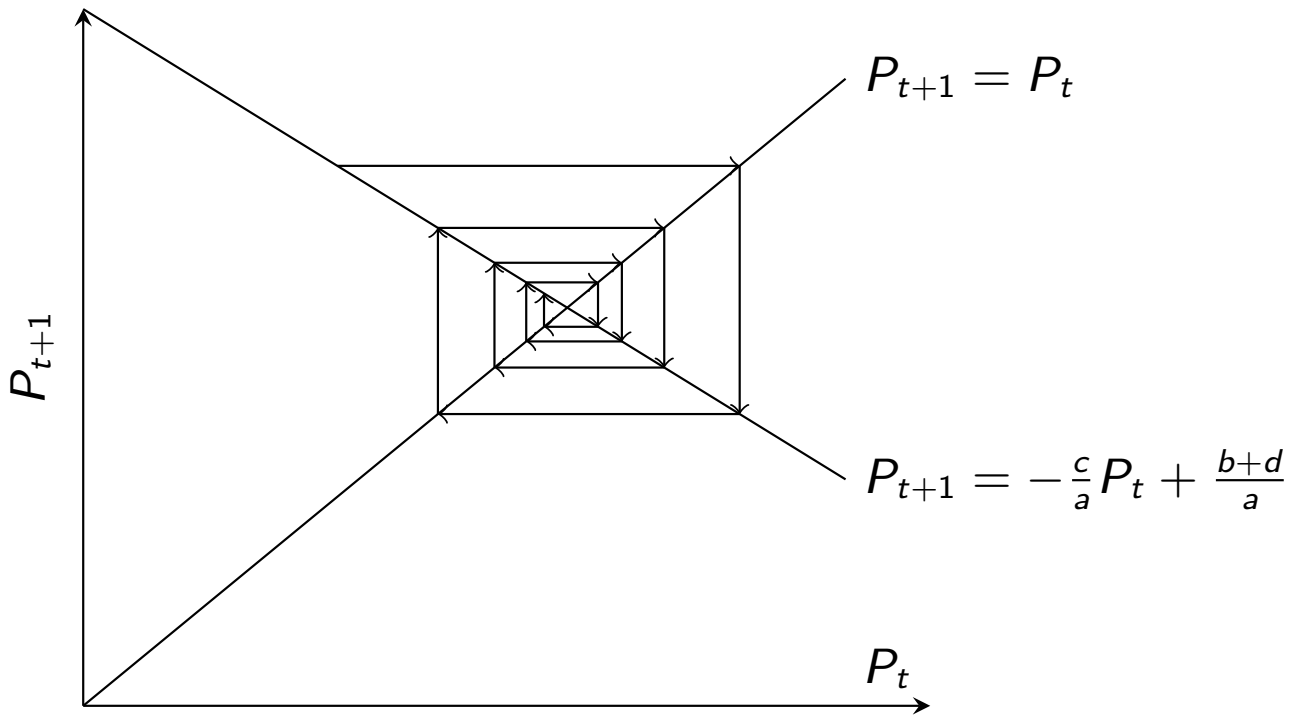
$$-aP^* + b = cP^* - d \Rightarrow P^* = \frac{b+d}{a+c}$$

Aplicación económica: Modelo de oferta y demanda

Obervación

El precio de equilibrio coincide con la solución particular de la completa.

Para finalizar vamos a estudiar el modelo con un diagrama de fase

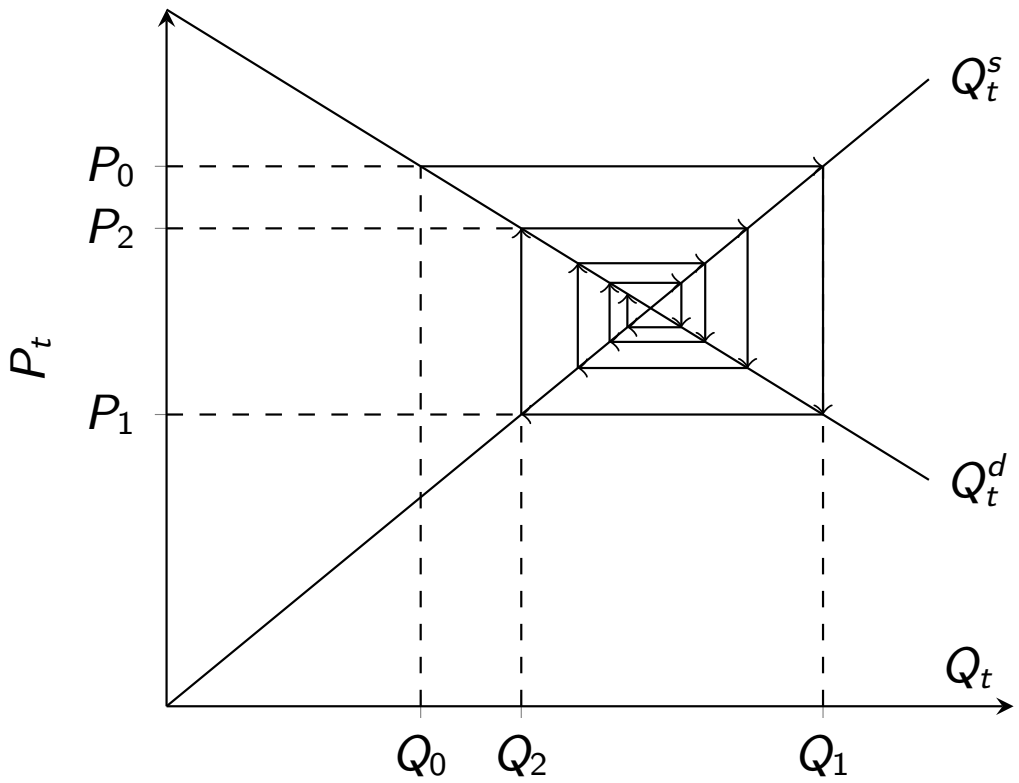


El equilibrio es convergente en forma oscilante. La oscilatoriedad es lo que le da el nombre de **modelo de la telaraña**.

Aplicación económica: Modelo de oferta y demanda

En esta aplicación es interesante graficar no solo la trayectoria del precio, sino también de las cantidades, que se determinaban retrospectivamente en función del precio. Se grafica el sistema original

$$\begin{cases} Q_t^D = -aP_t + b \\ Q_t^S = cP_{t-1} - d \end{cases}$$



Dado un precio inicial P_0, las cantidades demandadas son Q_0. Al período siguiente la oferta a ese precio es Q_1, que es mayor que la de equilibrio. Este exceso de oferta hace que caiga el precio a P_1 para que las cantidades demandadas sean Q_1 y se vacíe el mercado en $t = 1$. En $t = 2$ la oferta es Q_2, que es menor a la de equilibrio. Esta escasez de oferta hace que el precio aumente a P_2 para que la demanda se iguale a la oferta. El mismo razonamiento se sigue para los períodos siguientes, hasta que la oferta y la demanda son iguales en cada período.
En ecuaciones diferenciales, el único caso en que la trayectoria oscila es cuando hay raíces complejas, y como estas vienen de a pares conjugados, la ecuación diferencial debe ser al menos de segundo orden. En ecuaciones en diferencias podemos tener oscilaciones o fluctuaciones con ecuaciones de primer orden cuando la raíz es negativa. Esta es una de las principales diferencias que hay entre ecuaciones diferenciales y en diferencias. Se recomienda la lectura de los capítulos 17.3 y 17.4 del libro de Chiang.

Anexo: Propiedades trigonométricas

Cuando en (6) h_t es seno o coseno, las siguientes propiedades pueden resultar útiles para que el argumento del guess sea el mismo luego de desplazarlo

Teorema

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$$

Como casos particulares tenemos que:

- Desplazar el argumento en $\pi/2$ es equivalente a derivar.
- Desplazar el argumento en π es equivalente a multiplicar por -1.
- Desplazar el argumento en 2π es equivalente a multiplicar por 1.

Bibliografía

Bernardello, A., Bianco, M. J., Casparri, M. T., García Fronti, J. & Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática para Economistas con Excel y Matlab* [Cap. 3]. Omicron System.

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* [Caps. 17 y 18]. McGraw-Hill Education.

Sistemas de ecuaciones en diferencias

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

Al igual que en sistemas de ecuaciones diferenciales; los sistemas de ecuaciones en diferencias se pueden resolver despejando las ecuaciones o diagonalizando la matriz de coeficientes. También es cierto que todo sistema de n ecuaciones en diferencias es equivalente a una ecuación en diferencias de orden n.

$$\begin{aligned} y_{t+1}^1 &= a_{11} y_t^1 + \cdots + a_{1n} y_t^n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_{t+1}^n &= a_{n1} y_t^1 + \cdots + a_{nn} y_t^n \end{aligned} \tag{1}$$

o escrito en notación matricial

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}_t \tag{1}$$

Proposición

Si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, entonces la solución al sistema de ecuaciones (1) es

$$\mathbf{y}(t) = C_1\,\mathbf{x}^1\,\lambda_1^t + C_2\,\mathbf{x}^2\,\lambda_2^t + \cdots + C_n\,\mathbf{x}^n\,\lambda_n^t$$

donde λ_i es un autovalor de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{x}^i$ su autovector asociado.

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

Demostración: Si **A** es una matriz diagonal, es decir $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, entonces (1) es un sistema de n ecuaciones independientes entre sí $y_{t+1}^i = a_{ii} y_t^i$ cuya solución es

$$y_t^1 = C_1 a_{11}^t, \cdots, y_t^n = C_n a_{nn}^t$$

Demostramos la proposición para este caso particular, ya que como la matriz es diagonal, los a_{ii} son los autovalores y los autovectores son los canónicos.
Si $a_{ij} \neq 0$ para algún $i \neq j$ entonces podemos diagonalizar a la matriz **A**:

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$$

Consideremos el siguiente cambio de variables $\mathbf{z}_t = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}_t$.
Desplazando respecto a t y operando:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_{t+1} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}_{t+1} \\
&= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{y}_t \qquad (\text{ porque } \mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{y}_t) \\
&= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{z}_t \qquad (\text{ porque } \mathbf{y}_t = \mathbf{P} \mathbf{z}_t) \\
&= \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}_t
\end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

Como $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal, el sistema queda

$$z_{t+1}^1 = \lambda_1 z_t^1$$
$$\cdots\cdots$$
$$z_{t+1}^n = \lambda_n z_t^n$$

y su solución es

$$\begin{bmatrix} z_t^1 \\ \cdots \\ z_t^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\lambda_1^t \\ \cdots \\ C_n\lambda_n^t \end{bmatrix}$$

Finalmente, usamos la transformación de variables para volver el sistema a las coordenadas originales:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \mathbf{P}\,\mathbf{z}_t \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \cdots \mathbf{x}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\lambda_1^t \\ \cdots \\ C_n\lambda_n^t \end{bmatrix} \\ &= C_1\lambda_1^t\mathbf{x}^1 + C_2\lambda_2^t\mathbf{x}^2 + \cdots + C_n\lambda_n^t\mathbf{x}^n \quad \square \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

Para resolver un sistema de ecuaciones en diferencias por sus autovalores se procede igual que con los sistemas de ecuaciones diferenciales, con la única salvedad de que los autovalores no van en el exponente de e sino que van elevados a la t.
Se puede resolver escribiendo el sistema en forma normal y diagonalizando la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, o también con la matriz de operadores $\mathbf{G}(E)$. En ecuaciones en diferencias se usa el operador desplazamiento E. El uso de la matriz de operadores es más práctico porque evita tener que reescribir el sistema y luego puede usarse para ensayar la solución del sistema completo con coeficientes indeterminados.
Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x_{t+1} + 2x_t + 3y_t = 0 \\ 2y_t + y_{t+1} + 3x_t = 0 \end{cases} \qquad x_0 = 1;\ y_0 = {}^3/_5$$

$$\begin{bmatrix} E+2 & 3 \\ 3 & E+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{G}(E)| = (E+2)^2 - 9 = E^2 + 4E - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_1 = 1 \\ E_2 = -5 \end{cases}$$

$$\mathbf{G}(1)\,\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_t = -x_t$$

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

El vector propio asociado a $E_1 = 1$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{G}(-5)\,\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_t = x_t$$

Entonces el vector propio asociado a $E_2 = -5$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-5)^t$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1/5 \\ C_2 = 4/5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4/5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-5)^t$$

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} x_{t+2} + 6x_t + 7y_t = 0 \\ y_{t+2} + 2y_t + 3x_t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} E^2+6 & 7 \\ 3 & E^2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{G}(E)| = (E^2+6)(E^2+2) - 21 = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son

$$E_{1,2} = \pm 1, \quad E_{3,4} = \pm 3i$$

Los vectores propios asociados a cada raíz son

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

respectivamente.
La solución general es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (-1)^t + C_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} (3i)^t + C_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} (-3i)^t$$

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

La solución la podemos reescribir expresando a los números complejos en forma polar y usando la fórmula de De Moivre

$$\rho = \sqrt{3^2} = 3 \qquad \omega = \arctan \infty = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} C_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} (3i)^t + C_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} (-3i)^t &= C_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} 3^t \left(\cos(\pi/2\, t) + i \cdot \operatorname{sen}(\pi/2\, t)\right) \\ &\quad + C_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} 3^t \left(\cos(\pi/2\, t) - i \cdot \operatorname{sen}(\pi/2\, t)\right) \\ &= 3^t \cos(\pi/2\, t) \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} (C_3 + C_4) \\ &\quad + 3^t \operatorname{sen}(\pi/2\, t) \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} (C_3\, i - C_4\, i) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(C_1 + C_2(-1)^t\right) + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} 3^t (A \cos \pi/2t + B \operatorname{sen} \pi/2t)$$

Con $A = C_3 + C_4$ y $B = (C_3 - C_4)i$.

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

Cuando la matriz de coeficientes no es diagonalizable porque, por ejemplo, hay un autovalor con multiplicidad 2 que le corresponde un solo autovector, entonces se debe proponer una solución adicional que sea LI.

$$C_2 \left(\mathbf{x}^1 \, \frac{t}{\lambda} \lambda^t + \mathbf{x}^2 \, \lambda^t \right)$$

Reemplazando en el sistema $\mathbf{Y}_{t+1} = \mathbf{AY}$ se llega a que

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}^1 = \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 \end{cases}$$

El vector $\mathbf{x}^1$ ya lo tenemos, ahora hay que usarlo para obtener $\mathbf{x}^2$.
Si se necesitara otra solución adicional, porque la raíz tiene multiplicidad 3 y le corresponde un solo autovector, se propone

$$C_3 \left(\mathbf{x}^1 \, \frac{t(t-1)}{2! \, \lambda^2} \lambda^t + \mathbf{x}^2 \, \frac{t}{\lambda} \, \lambda^t + \mathbf{x}^3 \, \lambda^t \right)$$

Y el vector $\mathbf{x}^3$ se obtiene

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2$$

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

Si se necesita otra solución más:

$$C_4 \left(\mathbf{x}^1 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!\,\lambda^3} \lambda^t + \mathbf{x}^2 \frac{t(t-1)}{2!\,\lambda^2} \lambda^t + \mathbf{x}^3 \frac{t}{\lambda} \lambda^t + \mathbf{x}^4 \lambda^t \right)$$

con

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}^4 = \mathbf{x}^3$$

y así sucesivamente.

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} x_{t+1} - 2x_t - y_t = 0 \\ y_{t+1} - 2y_t = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{G}(E) = \begin{bmatrix} E-2 & -1 \\ 0 & E-2 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{G}(E)| = (E-2)^2 = 0 \Rightarrow E_{1,2} = 2$$

Sistemas de ecuaciones en diferencias homogéneos

$$\mathbf{G}(2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Necesitamos una solución más

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{si } x_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solución general es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t + C_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) 2^t = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t + C_2 \begin{bmatrix} t/2 \\ 1 \end{bmatrix} 2^t$$

Resolución de sistemas lineales

Para resolver sistemas de ecuaciones en diferencias no homogéneos

$$\mathbf{G}(E)\,\mathbf{Y}_t = \mathbf{H}_t$$

se usa el método de los coeficientes indeterminados.

- Si $\mathbf{H}_t$ es un vector de constantes entonces se ensaya un vector de constantes $\mathbf{Y}_t^p = \mathbf{A}$:

$$\mathbf{G}(E)\,\mathbf{A} = \mathbf{H}$$

$$\mathbf{G}(1)\,\mathbf{A} = \mathbf{H}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}(1)^{-1}\,\mathbf{H}$$

  es la solución particular del sistema completo, siempre que uno no sea raíz de la ecuación característica.

Resolución de sistemas lineales

- Si $\mathbf{H}_t$ es un vector de funciones exponenciales $\mathbf{k}b^t$ que tienen la misma base b, entonces se ensaya $\mathbf{Y}_t^p = \mathbf{A}\, b^t$:

$$\mathbf{G}(E)\,\mathbf{A}\,b^t = \mathbf{k}b^t$$

$$\mathbf{G}(b)\,\mathbf{A}\,b^t = \mathbf{k}b^t$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}(b)^{-1}\,\mathbf{k}$$

y reemplazando las constantes en la solución

$$\mathbf{Y}_p(t) = \mathbf{G}(b)^{-1}\,\mathbf{k}\,b^t$$

se llega a la solución particular, siempre que b no sea raíz de la ecuación característica.
Si $\mathbf{H}_t$ es la suma de funciones exponenciales con distintas bases entonces se separa en términos con igual base y se encuentra la solución particular para cada uno de ellos.

- Si $\mathbf{H}_t$ es una función seno o coseno con ángulo $\phi\, t$ entonces se plantea $\mathbf{Y}_t^p = \mathbf{A_1}\ \mathrm{sen}\,(\phi\, t) + \mathbf{A_2}\ \cos(\phi\, t)$ y se despejan los vectores de constantes.

Resolución de sistemas lineales

- Si $\mathbf{H}_t$ es un polinomio de grado n entonces se ensaya $\mathbf{Y}_t^p = \mathbf{A}\, t^n + \mathbf{B}\, t^{n-1} + \cdots + \mathbf{M}\, t + \mathbf{N}$ y se despejan las constantes.

Si en algún caso la solución a ensayar ya es solución de la homogénea, se debe multiplicar la solución por un vector de polinomios completo, del grado que haga falta para romper la dependencia lineal.

Ejemplo 4:

$$\begin{cases} 2x_{t+1} - 3x_t + 5y_t = 2 \\ 2x_t + y_{t+1} - 2y_t = 7 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2E-3 & 5 \\ 2 & E-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{G}(E)| = (2E-3)(E-2) - 10 = 0 \Rightarrow E_1 = 4, E_2 = -1/2$$

$$\mathbf{G}(4)\,\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolución de sistemas lineales

$$\mathbf{G}(-1/2)\,\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema homogéneo es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}_h = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 4^t + C_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} (1/2)^t$$

Para la solución particular de la completa

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}_p = [\mathbf{G}(1)]^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{9} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 4^t + C_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} (1/2)^t + \begin{bmatrix} \frac{37}{9} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

Resolución de sistemas lineales

Ejemplo 5:

$$\begin{cases} x_t + y_{t+1} - 7y_t = -3^t \\ x_{t+1} + 3y_t - 5x_t = -3^{t+1} \end{cases}$$

Luego de calcular la ecuación característica, obtener las raíces y los vectores propios, la solución del sistema homogéneo resulta

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}_h = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} 8^t + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} 4^t$$

Para la solución particular de la completa

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}_c = [\mathbf{G}(3)]^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} 3^t = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} 3^t = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} 3^t$$

Entonces la solución general es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} 8^t + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} 4^t + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} 3^t$$

Estabilidad

Como un sistema de n ecuaciones en diferencias de primer orden puede convertirse en una ecuación en diferencias de orden n, las condiciones de estabilidad de un sistema son las mismas que las que se aplican a las ecuaciones.
Un sistema es estable si y solo si todas las raíces de la ecuación característica tienen módulo menor a 1.

Estabilidad local de sistemas no lineales

Dado un sistema de ecuaciones en diferencias no lineal autónomo

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= g(x_t, y_t) \end{aligned} \tag{2}$$

Podemos linealizarlo en torno al punto de equilibrio $(\bar{x}, \bar{y})$ considerando la expansión de Taylor:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &\approx f(\bar{x}, \bar{y}) + f'_x(\bar{x}, \bar{y})(x_t - \bar{x}) + f'_y(\bar{x}, \bar{y})(y_t - \bar{y}) \\ y_{t+1} &\approx g(\bar{x}, \bar{y}) + g'_y(\bar{x}, \bar{y})(y_t - \bar{y}) + g'_x(\bar{x}, \bar{y})(x_t - \bar{x}) \end{aligned}$$

Como $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}$ y $g(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$

$$\begin{aligned} x_{t+1} &\approx \bar{x} + f'_x(\bar{x}, \bar{y})(x_t - \bar{x}) + f'_y(\bar{x}, \bar{y})(y_t - \bar{y}) \\ y_{t+1} &\approx \bar{y} + g'_y(\bar{x}, \bar{y})(y_t - \bar{y}) + g'_x(\bar{x}, \bar{y})(x_t - \bar{x}) \end{aligned}$$

Vamos a reescribir el sistema con variables que representen desvíos respecto al equilibrio, $x_t^d = x_t - \bar{x}$, $y_t^d = y_t - \bar{y}$

$$\begin{aligned} x_{t+1}^d &\approx f'_x(\bar{x}, \bar{y}) x_t^d + f'_y(\bar{x}, \bar{y}) y_t^d \\ y_{t+1}^d &\approx g'_y(\bar{x}, \bar{y}) y_t^d + g'_x(\bar{x}, \bar{y}) x_t^d \end{aligned}$$

Estabilidad local de sistemas no lineales

Ahora este es un sistema lineal que puede ser analizado con los métodos estudiados:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^d \\ y_{t+1}^d \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{y})} \begin{bmatrix} x_t^d \\ y_t^d \end{bmatrix}$$

¿La estabilidad del sistema linealizado coincide siempre con la del sistema no lineal? No. Cuando hay raíces con módulo igual a 1 y el resto de las raíces son menores a 1 en módulo, entonces la linealización no es informativa.
En resumen:

- Si todas las raíces del sistema lineal tienen módulo menor a 1 entonces la solución es localmente estable.
- Si al menos una raíz del sistema lineal tiene módulo mayor a 1, entonces la solución es localmente inestable.
- Si al menos una raíz (o todas) es igual a 1 en módulo y el resto son menores a 1 en módulo, entonces no se puede concluir nada sobre la estabilidad local de la solución

Aplicación económica: Modelo de Lotka-Volterra

Considere el siguiente modelo poblacional en el cual hay dos especies: conejos, x, y zorros, y.

$$\begin{cases} \Delta x_t = \alpha x_t - \beta\, x_t\, y_t \\ \Delta y_t = \delta\, y_t\, x_t - \gamma\, y_t \end{cases}$$

La población de conejos se reproduce y aumenta en forma exponencial con un factor α, pero es cazada por los zorros con un factor β. Por otro lado, la población de zorros se alimenta de los conejos y se reproduce con un factor δ, pero fallece por causas naturales con un factor γ. Todos los parámetros del modelo son positivos y $\gamma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$. Vamos a encontrar los equilibrios del sistema, linealizar el sistema en torno a ellos y determinar la estabilidad.

$$\begin{cases} \alpha x_t - \beta x_t y_t = 0 \\ \delta y_t x_t - \gamma y_t = 0 \end{cases}$$

$x_t = y_t = 0$ verifican el sistema así que constituyen un equilibrio.
Despejando de la primera ecuación

$$y_t = \frac{\alpha}{\beta} = y^*$$

Despejando de la segunda ecuación

$$x_t = \frac{\gamma}{\delta} = x^*$$

Estabilidad local de sistemas no lineales

Tenemos dos equilibrios $(0,0)$ y $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$

Para linealizar el sistema hay que escribirlo en forma normal

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1+\alpha)x_t - \beta\, x_t\, y_t \\ y_{t+1} = \delta\, y_t\, x_t + (1-\gamma)\, y_t \end{cases}$$

y calcular las siguientes derivadas parciales

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = 1 + \alpha - \beta y_t$$

$$\frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} = -\beta x_t$$

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial y_t} = \delta x_t + (1-\gamma)$$

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_t} = \delta y_t$$

El sistema linealizado es

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha-\beta y_t & -\beta x_t \\ \delta y_t & \delta x_t + (1-\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Aplicación económica: Modelo de Lotka-Volterra

Si evaluamos la jacobiana en $(x^*, y^*) = (0, 0)$

$$\mathbf{J}|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}$$

Esta matriz ya está en forma diagonal. Los autovalores son $\lambda_1 = 1 + \alpha > 1$ y $\lambda_2 = 1 - \gamma \in (0, 1)$. Este equilibrio es inestable porque la primera raíz es mayor a 1 en módulo.

Si la evaluamos en $(x^*, y^*) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$

$$\mathbf{J}|_{(\gamma/\delta, \alpha/\beta)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1 + \alpha\gamma) = 0$$

Las raíces son

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1+\alpha\gamma)}}{2} = 1 \pm \sqrt{\alpha\gamma}\, i$$

El módulo de estas raíces es

$$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{\alpha\gamma})^2} = \sqrt{1 + \alpha\gamma} > 1 \text{ porque } \alpha\gamma > 0$$

Por lo tanto, este equilibrio también es inestable.

Bibliografía

Bernardello, A., Bianco, M. J., Casparri, M. T., García Fronti, J. & Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática para Economistas con Excel y Matlab* [Cap. 3]. Omicron System.

Chiang, A. & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* [Cap. 19]. McGraw-Hill Education.

Programación dinámica

Matías Battocchio

FCE-UBA

MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

Programación dinámica

Vamos a estudiar problemas de optimización similares a los que vimos en la clase de control óptimo, pero esta vez en tiempo discreto.

$$\underset{u_t, y_{t+1}}{\text{máx}} \; J_0 = \sum_{t=0}^{T} F(t, y_t, u_t) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{c} y_{t+1} = g(t, y_t, u_t) \\ y_0 \text{ dado} \\ u_t \in U \quad \forall t \in \{0, 1, \cdots, T\} \end{array} \tag{1}$$

Este problema se puede resolver con los multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} F(t, y_t, u_t) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left[g(t, y_t, u_t) - y_{t+1} \right]$$

Resolución con multiplicadores de Lagrange

Las CPO son:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial u_0} &= \frac{\partial F(\cdot)}{\partial u_0} + \lambda_0 \frac{\partial g(\cdot)}{\partial u_0} = 0 \\
&\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial u_T} &= \frac{\partial F(\cdot)}{\partial u_T} + \lambda_T \frac{\partial g(\cdot)}{\partial u_T} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial y_1} &= \frac{\partial F(\cdot)}{\partial y_1} - \lambda_0 + \lambda_1 \frac{\partial g(\cdot)}{\partial y_1} = 0 \\
&\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial y_{T+1}} &= \frac{\partial F(\cdot)}{\partial y_{T+1}} - \lambda_T + \lambda_{T+1} \frac{\partial g(\cdot)}{\partial y_{T+1}} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_0} &= g(t, y_{t_0}, u_{t_0}) - y_1 = 0 \\
&\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_T} &= g(t, y_T, u_T) - y_{T+1} = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Estas son $3(T+1)$ ecuaciones, que se resuelven simultáneamente, y se obtienen las sucesiones $\{u_t\}_{t=0}^{T}, \{y_t\}_{t=1}^{T+1}, \{\lambda_t\}_{t=0}^{T}$ que (si se cumplen las CSO) resuelven el problema de optimización.

Resolución con multiplicadores de Lagrange

Ejemplo 1:

$$\max_{u_t, y_{t+1}} \sum_{t=0}^{4} 0{,}9^t \left(20y_t - 0{,}2u_t^2\right) + 0{,}9^5\, 2y_5 \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{r} y_{t+1} = y_t + u_t \\ y_0 = 10 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{4} 0{,}9^t \left(20y_t - 0{,}2u_t^2\right) + 0{,}9^5\, 2y_5 + \sum_{t=0}^{4} \lambda_t \left(y_t + u_t - y_{t+1}\right)$$

Las CPO[1] son

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial u_t} = -0{,}9^t \left(0{,}4u_t\right) + \lambda_t = 0 \quad \text{para } t = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial y_t} = 0{,}9^t \left(20\right) - \lambda_{t-1} + \lambda_t = 0 \quad \text{para } t = 1, 2, 3, 4$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial y_5} = 0{,}9^5 \left(2\right) - \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda_t} = y_{t+1} - y_t + u_t = 0 \quad \text{para } t = 0, 1, 2, 3, 4$$

[1] Como la función objetivo es cóncava y la restricción es lineal, las CPO son suficientes para un máximo.

Resolución con multiplicadores de Lagrange

De la tercer CPO $\lambda_4 = 1{,}18$
De la segunda CPO:

$$\lambda_3 = 14{,}3,\ \lambda_2 = 28{,}88, \lambda_1 = 45{,}08,\ \lambda_0 = 63{,}08$$

Usando los valores de λ_t y la primer CPO

$$u_0 = 157{,}7,\ u_1 = 125{,}2,\ u_2 = 89{,}1,\ u_3 = 49,\ u_4 = 4{,}5$$

Usando estos valores de u_t y la última CPO

$$y_1 = 167{,}7,\ y_2 = 292{,}9,\ y_3 = 382,\ y_4 = 431,\ y_5 = 435{,}5$$

Reemplazando en la funcional objetivo

$$J_0^* = 10268$$

Recursividad

Existe otro método de resolución (programación dinámica) que explota la estructura recursiva del problema y lo parte en muchos problemas de un período.
En el momento $t = 0$ el agente se enfrenta al problema de elegir el control óptimo u_0^* dado y_0, luego por la ecuación de movimiento se determina $y_1^* = g(t, y_0, u_0^*)$. En el momento $t = 1$ el problema es elegir el control óptimo u_1^* dado y_1^*, y luego por la ecuación de movimiento se determina $y_2^* = g(t, y_1^*, u_1^*)$. Y así sucesivamente.
Si estamos en el momento $t = s$ con y_s dado, el agente elegirá el control u_s que maximice el retorno inmediato $F(s, y_s, u_s)$, pero también los retornos futuros $J_{s+1} = \sum_{t=s+1}^{T} F(t, y_t, u_t)$. Entonces la función de valor óptima en s satisface la siguiente ecuación

$$J_s^*(y_s) = \max_{u_s, y_{s+1}} [F(s, y_s, u_s) + J_{s+1}^*(y_{s+1})] \text{ sujeto a } y_{s+1} = g(s, y_s, u_s) \tag{3}$$

o

$$J_s^*(y_s) = \max_{u_s} [F(s, y_s, u_s) + J_{s+1}^*(g(s, y_s, u_s))] \tag{3}$$

Esta es la ecuación de Bellman.

La ecuación de Bellman

La ecuación de Bellman nos permite pensar el problema de optimización dinámica de otra forma. En vez de buscar simultáneamente los $T+1$ controles de un problema dinámico, podemos partir el problema en $T+1$ problemas estáticos, y buscar el control óptimo de cada período.
Para tener en cuenta el impacto de la elección del control sobre los retornos futuros se debe comenzar a resolver el problema en el último período.
Ejemplo 1 (cont.):

$$\max_{u_t, y_{t+1}} \sum_{t=0}^{4} 0{,}9^t \left(20y_t - 0{,}2u_t^2\right) + 0{,}9^5\, 2y_5 \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{c} y_{t+1} = y_t + u_t \\ y_0 = 10 \end{array}$$

Comenzamos por $t = 4$. La ecuación de Bellman nos dice que

$$J_4^*(y_4) = \max_{u_4, y_5} \left[F(4, y_4, u_4) + J_5^*(y_5)\right] = \max_{u_4, y_5} \left[0{,}9^4 \left(20y_4 - 0{,}2u_4^2\right) + 0{,}9^5\, 2y_5\right]$$

donde la maximización está sujeta a $y_{t+1} = y_t + u_t$

La ecuación de Bellman

Para resolver este problema de optimización de un período armamos la lagrangiana

$$\mathcal{L} = 0{,}9^4 \left(20y_4 - 0{,}2u_4^2\right) + 0{,}9^5\, 2y_5 + \lambda\left(y_4 + u_4 - y_5\right)$$

Las CPO son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} = 0{,}9^4(-0{,}2)2\, u_4 + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_5} = 0{,}9^5\, 2 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y_4 + u_4 - y_5 = 0$$

De la segunda CPO $\lambda = 1{,}18$.
De la primera CPO $u_4 = 4{,}5$.
De la tercera CPO $y_5 = 4{,}5 + y_4$.
Reemplazando en la ecuación de Bellman

$$J_4^*(y_4) = 2{,}66 + 14{,}3y_4$$

La ecuación de Bellman

Pasemos ahora a $t = 3$. La ecuación de Bellman es

$$J_3^*(y_3) = \underset{u_3, y_4}{\text{máx}} \left[F(3, y_3, u_3) + J_4^*(y_4)\right] = \underset{u_3, y_4}{\text{máx}} \left[0{,}9^3 \left(20y_3 - 0{,}2u_3^2\right) + 2{,}66 + 14{,}3y_4\right]$$

La lagrangiana es

$$\mathcal{L} = 0{,}9^3 \left(20y_3 - 0{,}2u_3^2\right) + 2{,}66 + 14{,}3y_4 + \lambda \left(y_3 + u_3 - y_4\right)$$

Las CPO son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} = 0{,}9^3(-0{,}2)2\, u_3 + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_4} = 14{,}3 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y_3 + u_3 - y_4 = 0$$

De la segunda CPO $\lambda = 14{,}3$.
De la primera CPO $u_3 = 49$.
De la tercera CPO $y_4 = 49 + y_3$.
Reemplazando en la ecuación de Bellman

$$J_3^*(y_3) = 353{,}3 + 28{,}9y_4$$

La ecuación de Bellman

Pasemos ahora a $t = 2$. La ecuación de Bellman es

$$J_2^*(y_2) = \underset{u_2, y_3}{\text{máx}} \left[F(2, y_2, u_2) + J_3^*(y_3)\right] = \underset{u_2, y_3}{\text{máx}} \left[0{,}9^2 \left(20y_2 - 0{,}2u_2^2\right) + 353{,}29 + 28{,}9y_3\right]$$

Luego de armar la lagrangiana y derivar las CPO resulta

$$\lambda = 28{,}88, \quad u_2 = 89{,}1, \quad y_3 = 89{,}1 + y_2$$

Reemplazando en la ecuación de Bellman

$$J_2^*(y_2) = 1640{,}42 + 45{,}08y_2$$

En $t = 1$ la ecuación de Bellman es

$$J_1^*(y_1) = \underset{u_1, y_2}{\text{máx}} \left[F(1, y_1, u_1) + J_2^*(y_2)\right] = \underset{u_1, y_2}{\text{máx}} \left[0{,}9 \left(20y_1 - 0{,}2u_1^2\right) + 1640{,}42 + 45{,}08y_2\right]$$

Luego de armar la lagrangiana y derivar las CPO resulta

$$\lambda = 45{,}08, \quad u_1 = 125{,}2, \quad y_2 = 125{,}2 + y_1$$

Reemplazando en la ecuación de Bellman

$$J_1^*(y_1) = 4462{,}93 + 63{,}08y_1$$

La ecuación de Bellman

Finalmente, en $t = 0$ la ecuación de Bellman es

$$J_0^*(y_0) = \underset{u_0, y_1}{\text{máx}} \left[F(0, y_0, u_0) + J_1^*(y_1) \right] = \underset{u_0, y_1}{\text{máx}} \left[\left(20y_0 - 0{,}2u_0^2 \right) + 4462{,}93 + 63{,}08y_1 \right]$$

Luego de armar la lagrangiana y derivar las CPO resulta

$$\lambda = 63{,}08, \quad u_0 = 157{,}7, \quad y_1 = 157{,}7 + y_0$$

y de reemplazar en la ecuación de Bellman

$$J_0^*(y_0) = 9436{,}79 + 83{,}08y_0$$

Llegamos a la misma sucesión de valores de $\{\lambda_t\}_{t=0}^4$ y de $\{u_t\}_{t=0}^4$ que cuando resolvimos el problema con los multiplicadores de Lagrange simultáneamente. Luego de reemplazar $y_0 = 10$ en la sucesión de $\{y_t\}_{t=0}^5$ llegamos a

$$y_1 = 157{,}7 + y_0 = 167{,}7, \quad y_2 = 125{,}2 + y_1 = 292{,}9, \quad y_3 = 89{,}1 + y_2 = 382$$

$$y_4 = 49 + y_3 = 431, \quad y_5 = 4{,}5 + y_4 = 435{,}5$$

y en la funcional objetivo

$$J_0^*(y_0) = 9436{,}79 + 83{,}08\, y_0 = 10268$$

El principio de optimalidad de Bellman

La idea de partir un problema en subproblemas más pequeños lleva implícito el siguiente argumento.

Principio de optimalidad de Bellman

Una política óptima tiene la propiedad de que, sin importar cuáles fueron el estado inicial y la decisión inicial, las restantes decisiones deben constituir una política óptima respecto a la variable de estado resultante de la primera decisión.

Formalmente, el POB implica que si $\{u_t, y_{t+1}\}_{t=0}^{T}$ resuelven el siguiente problema

$$\max_{u_t, y_{t+1}} J_0 = \sum_{t=0}^{T} F(t, y_t, u_t) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{c} y_{t+1} = g(t, y_t, u_t) \\ y_0 \text{ dado} \\ u_t \in U \quad \forall t \in \{0, 1, \cdots, T\} \end{array}$$

entonces $\{u_t, y_{t+1}\}_{t=\bar{t}}^{T}$ resuelven

$$\max_{u_t, y_{t+1}} J_{\bar{t}} = \sum_{t=\bar{t}}^{T} F(t, y_t, u_t) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{c} y_{t+1} = g(t, y_t, u_t) \\ y_{\bar{t}} \text{ dado} \\ u_t \in U \quad \forall t \in \{\bar{t}, \bar{t}+1, \cdots, T\} \end{array}$$

para todo $\bar{t} \in \{0, 1, \cdots, T\}$.

El principio de optimalidad de Bellman

Ejemplo 1 (cont.): En nuestro ejemplo el POB implica que si en vez de comenzar el problema en $t = 0$ con $y_0 = 10$ lo hubiésemos comenzado en $t = 3$ con $y_3 = 382$ entonces los valores u_3, u_4, y_4, y_5 deberían ser iguales. Y efectivamente así sucede ya que los valores de u_t no dependían de la variable de estado, y

$$y_4 = 49 + y_3 = 431, \quad y_5 = 4{,}5 + y_4 = 435{,}5$$

Observación

El POB implica que a medida que pasa el tiempo no hay incentivos a desviarse del plan original.

Las políticas óptimas que cumplen el POB son consistentes temporalmente.
El POB es una consecuencia de la estructura recursiva del problema, y no tiene porqué cumplirse en soluciones de problemas más generales.

Programación dinámica

Ejemplo 2:

$$\max_{u_t, y_{t+1}} J_0 = \sum_{t=0}^{T-1} -\frac{2}{3} u_t y_t + \ln y_T \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{c} y_{t+1} = y_t(1 + u_t y_t) \\ y_0 > 0 \\ u_t \geq 0 \end{array}$$

En $t = T - 1$ la ecuación de Bellman es

$$J^*_{T-1}(y_{T-1}) = \max_{u_{T-1}, y_T} \left[-\frac{2}{3} u_{T-1} y_{T-1} + \ln y_T \right]$$

donde la maximización está sujeta a $y_T = y_{T-1}(1 + u_{T-1} y_{T-1})$.
Reemplazando la restricción

$$J^*_{T-1}(y_{T-1}) = \max_{u_{T-1}} \left[-\frac{2}{3} u_{T-1} y_{T-1} + \ln \left(y_{T-1}(1 + u_{T-1} y_{T-1}) \right) \right]$$

Derivando respecto a u_{T-1} e igualando a cero

$$-\frac{2}{3} y_{T-1} + \frac{y_{T-1}}{1 + u_{T-1} y_{T-1}} = 0$$

$$u_{T-1} = \frac{1}{2 y_{T-1}}$$

Programación dinámica

Entonces

$$J^*_{T-1}(y_{T-1}) = -\frac{2}{3}\frac{1}{2\,y_{T-1}}\,y_{T-1} + \ln\left[y_{T-1}\left(1+\frac{1}{2\,y_{T-1}}\,y_{T-1}\right)\right] = -\frac{1}{3} + \ln y_{T-1} + \ln\frac{2}{3}$$

$$J^*_{T-1}(y_{T-1}) = \ln y_{T-1} + C$$

donde $C = -\frac{1}{3} + \ln\frac{2}{3}$
La ecuación de Bellman en $t = T-2$ es

$$\begin{aligned} J^*_{T-2}(y_{T-2}) &= \max_{u_{T-2},y_{T-1}}\left[-\frac{2}{3}\,u_{T-2}\,y_{T-2} + \ln y_{T-1} + C\right] \\ &= \max_{u_{T-2}}\left[-\frac{2}{3}u_{T-2}\,y_{T-2} + \ln\left(y_{T-2}(1+u_{T-2}\,y_{T-2})\right) + C\right] \end{aligned}$$

Derivando e igualando a cero

$$-\frac{2}{3}y_{T-2} + \frac{y_{T-2}}{1+u_{T-2}\,y_{T-2}} = 0$$

$$u_{T-2} = \frac{1}{2\,y_{T-2}}$$

Programación dinámica

Entonces

$$J^*_{T-2}(y_{T-2}) = -\frac{2}{3}\frac{1}{2\,y_{T-2}}\,y_{T-2} + \ln\left[y_{T-2}\left(1+\frac{1}{2\,y_{T-2}}\,y_{T-2}\right)\right] + C$$

$$J^*_{T-2}(y_{T-2}) = -\frac{1}{3} + \ln y_{T-2} + \ln\frac{2}{3} + C$$

$$J^*_{T-2}(y_{T-2}) = \ln y_{T-2} + 2\,C$$

Llegamos a la misma solución de la variable de control, y este patrón continúa, ya que $J^*_{T-k}(y_{T-k}) = \ln y_{T-k} + k\,C$ para $k = 0, 1, \cdots, T-1, T$. Y para esa función de valor en la ecuación de Bellman siempre vamos a tener que $u_{T-k}(y_{T-k}) = {}^1/_{(2\,y_{T-k})}$.

Reemplazando $u_t = ({}^1/_{2y_t})$ en la ecuación de movimiento

$$y_{t+1} = y_t\left(1+\frac{1}{2y_t}\,y_t\right) = \frac{3\,y_t}{2}$$

La solución de esta ecuación en diferencias es

$$y^*_t = \left(\frac{3}{2}\right)^t y_0$$

Entonces reemplazando en $u_t(y_t)$

$$u^*_t = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^t}{2\,y_0}$$

Función de valor corriente

Observación

A diferencia del ejemplo 1, en este ejemplo la variable de control es una función de la variable de estado. Representa una regla de política.

En muchos casos de aplicaciones económicas

$$F(t, y_t, u_t) = \beta^t F(y_t, u_t)$$

Acá es útil definir la función de valor corriente

$$V_t(y_t) \equiv \frac{J_t(y_t)}{\beta^t}$$

Proposición

La ecuación de Bellman con la función de valor corriente es

$$V_t^*(y_t) = \max_{u_t, y_{t+1}} \left[F(y_t, u_t) + \beta V_{t+1}^*(y_{t+1})\right] \text{ sujeto a } y_{t+1} = g(t, y_t, u_t)$$

Demostración: Partimos de

$$V_t^*(y_t) = \frac{J_t^*(y_t)}{\beta^t} = \frac{\max_{u_t, y_{t+1}} \left[\beta^t F(y_t, u_t) + J_{t+1}^*(y_{t+1})\right]}{\beta^t}$$

Función de valor corriente

$$
\begin{aligned}
V_t^*(y_t) &= \max_{u_t, y_{t+1}} \frac{\beta^t F(y_t, u_t) + J_{t+1}^*(y_{t+1})}{\beta^t} \\
&= \max_{u_t, y_{t+1}} \left[F(y_t, u_t) + \frac{J_{t+1}^*(y_{t+1})}{\beta^t} \right] \\
&= \max_{u_t, y_{t+1}} \left[F(y_t, u_t) + \frac{\beta\, J_{t+1}^*(y_{t+1})}{\beta^{t+1}} \right] \\
&= \max_{u_t, y_{t+1}} \left[F(y_t, u_t) + \beta\, V_{t+1}^*(y_{t+1}) \right] \qquad \square
\end{aligned}
$$

Programación dinámica en tiempo infinito

Ejemplo 3:

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \, u(c_t) \text{sujeto a } f(k_t) = k_{t+1} + c_t$$

donde $u'(\cdot) > 0, \lim_{x \to 0} u'(x) = +\infty, u''(\cdot) < 0, f'(\cdot) > 0$.
La ecuación de Bellman con la función de valor corriente es

$$V(k_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} u(c_t) + \beta \, V(k_{t+1}) = \max_{c_t} u(c_t) + \beta \, V(f(k_t) - c_t)$$

La condición de primer orden es

$$u'(c_t) + \beta \, V'(f(k_t) - c_t)(-1) = 0$$

$$u'(c_t) = \beta \, V'(f(k_t) - c_t) \qquad \text{(CPO)}$$

La (CPO) dice que en el óptimo se compensan la utilidad marginal del consumo presente con el valor descontado de los futuros retornos producto de un incremento marginal en k_{t+1}.
La CPO contiene la derivada de la función de valor, lo cual no es muy útil para resolver el problema porque no sabemos cuál es esa función.

Programación dinámica en tiempo infinito

Vamos a hacer lo siguiente: la CPO define implícitamente c_t en función de k_t, $c_t = h(k_t)$. Esta función la vamos a reemplazar en la ecuación de Bellman y derivarla

$$V^*(k_t) = u(h(k_t)) + \beta\, V^*(f(k_t) - h(k_t))$$

$$V^{*\prime}(k_t) = u'(h(k_t))\, h'(k_t) + \beta\, V^{*\prime}(f(k_t) - h(k_t))\,(f'(k_t) - h'(k_t))$$

$$V^{*\prime}(k_t) = h'(k_t) \underbrace{\left[u'(h(k_t)) - \beta\, V^{*\prime}(f(k_t) - h(k_t))\right]}_{=0 \text{ por la CPO}} + \beta\, V^{*\prime}\left(f(k_t) - h(k_t)\right)\, f'(k_t)$$

Entonces

$$V^{*\prime}(k_t) = \beta\, V^{*\prime}\left(f(k_t) - h(k_t)\right)\, f'(k_t)$$

$$V^{*\prime}\left(f(k_t) - h(k_t)\right) = \frac{V^{*\prime}(k_t)}{\beta\, f'(k_t)} \qquad \text{(BS)}$$

Esta es la ecuación de Benveniste-Scheinkman, que la vamos a reemplazar en la (CPO):

$$u'(c_t) = \frac{V^{*\prime}(k_t)}{f'(k_t)}$$

Desplazamos un período esta ecuación

$$u'(c_{t+1}) = \frac{V^{*\prime}(k_{t+1})}{f'(k_{t+1})}$$

y despejamos

$$V^{*\prime}(k_{t+1}) = u'(c_{t+1})\, f'(k_{t+1})$$

Programación dinámica en tiempo infinito

Y reemplazamos nuevamente en la (CPO)

$$u'(c_t) = \beta\, u'(c_{t+1})\, f'(k_{t+1}) \qquad \text{(Ec. Euler)}$$

Esta es la ecuación de Euler. Si usamos la ecuación de movimiento

$$u'\left(f(k_t) - k_{t+1}\right) = \beta\, u'\left(f(k_{t+1}) - k_{t+2}\right)\, f'(k_{t+1}) \qquad (4)$$

vemos que es una ecuación en diferencias de segundo orden en k_t.
Si la ecuación en diferencias es lineal podemos resolverla y encontrar la trayectoria óptima del stock de capital. Cuando la ecuación es no lineal se puede hacer un análisis mediante diagramas de fase o linealizar la ecuación.
Supongamos que $u(c_t) = \ln c_t$ y que $f(k_t) = A\, k_t$. Entonces reemplazando en la ecuación de Euler

$$\frac{1}{c_t} = \beta\, \frac{1}{c_{t+1}}\, A$$

$$c_{t+1} = \beta\, A\, c_t$$

La solución de esta ecuación en diferencias es

$$c_t = C_1\, (\beta\, A)^t$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento

$$k_{t+1} - A\, k_t = C_1\, (\beta\, A)^t$$

Programación dinámica en tiempo infinito

La solución de esta ecuación en diferencia es

$$k_t = C_2\, A^t + \frac{C_1}{A(1-\beta)}(\beta\, A)^t$$

Tenemos dos constantes indeterminadas: C_1 y C_2. Para determinarlas usamos la condición inicial

$$k_0 = k_0 > 0$$

y la condición de transversalidad para este tipo de problemas (Kamihigashi, 2002):

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t\, u'(c_t)\, k_{t+1} = 0 \tag{5}$$

que representa una condición necesaria.
Por la condición inicial :

$$k_0 = C_2 + \frac{C_1}{A(1-\beta)} = k_0 > 0$$

$$\Rightarrow C_1 = (k_0 - C_2)(1-\beta)\, A$$

Programación dinámica en tiempo infinito

Por la condición de transversalidad:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{1}{c_t} k_{t+1} &= \lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{1}{C_1 (\beta A)^t} \left[C_2 A^{t+1} + \frac{C_1}{A(1-\beta)} (\beta A)^{t+1} \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{1}{C_1 (\beta A)^t} \left[C_2 A A^t + \frac{C_1}{A(1-\beta)} \beta A (\beta A)^t \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \beta^t A^t \frac{1}{C_1 (\beta A)^t} \left[C_2 A + \frac{C_1}{(1-\beta)} \beta (\beta)^t \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{C_2 A}{C_1} + \frac{\beta}{1-\beta} \beta^t = \frac{C_2 A}{C_1} = 0
\end{aligned}$$

Entonces

$$C_2 = 0, \quad C_1 = A(1-\beta) k_0$$

Y las trayectorias óptimas son

$$c_t = A(1-\beta) k_0 (\beta A)^t$$

$$k_t = k_0 (\beta A)^t$$

Programación dinámica en tiempo infinito

Observación

Cuando estudiamos control óptimo en tiempo continuo la condición de transversalidad para este tipo de problemas era

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t)\, k(t) = 0$$

que es la versión continua de (5). La diferencia es que en control óptimo teníamos una variable adicional que representaba el precio sombra del stock de capital. Acá esa variable no está pero el precio sombra del stock de capital es $\beta^t\, u'(c_t)$.
En ambos casos la idea que transmite la condición de transversalidad es la misma: en el óptimo el agente no sobreacumula capital.

Bibliografía

Kamihigashi, T. (2002). A simple proof of the necessity of the transversality condition. *Economic Theory*, *20*, 427-433.

Sargent, T. (1987). *Dynamic macroeconomic theory* [Cap. 1]. Harvard University Press.

Sydsæter, K., Hammond, P., Seierstad, A. & Strom, A. (2008). *Further Mathematics for Economic Analysis* [Cap. 12]. Financial Times Prentice Hall.